

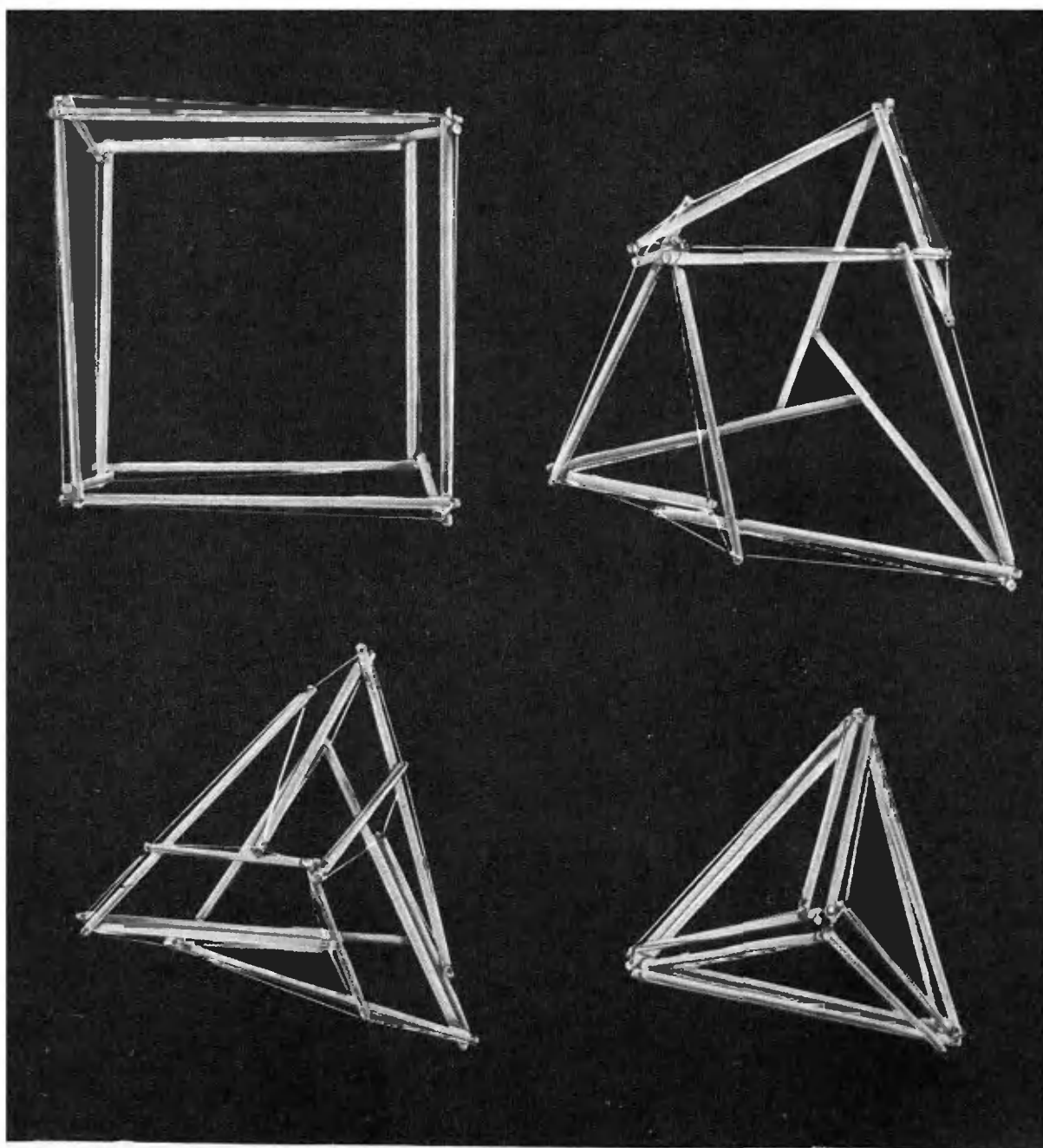
ISSN 0130-2221

# Квант

**10**  
**1979**

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Все эти фигуры получены преобразованием одной и той же модели, составленной из двенадцати стержней, скрепленных нитка-

ми. Автор этой модели В. Колейчук назвал ее трансформируемым кубом. О том, как изготовить такой куб, рассказано на с. 58.

Научно-популярный  
 физико-математический  
 журнал  
 Академии наук СССР  
 и Академии педагогических  
 наук СССР



Издательство «Наука»  
 Главная редакция  
 физико-математической  
 литературы

**В НОМЕРЕ:**

- |   |    |   |
|---|----|---|
| Главный редактор<br>академик И. К. Кикоин                             | 2  | Праздник твоего учителя   |
| Первый заместитель<br>главного редактора<br>академик А. Н. Колмогоров | 4  | <i>А. Ширшов, А. Никитин.</i> Обобщенная сумма углов многогранника                            |
|   | 8  | <i>И. Урусовский.</i> Бег, ходьба и физика  |
|   | 15 | <i>В. Лешковцев, М. Прошин.</i> На пути к энергетике будущего                                 |
| <b>Редакционная коллегия:</b>   |    | <b>Лаборатория «Кванта»</b>   |
| М. И. Башмаков  | 20 | Олимпиада дома  |
| С. Т. Беляев  |    |   |
| В. Г. Болтянский  |    | <b>Математический кружок</b>  |
| Н. Б. Васильев  | 21 | <i>Г. Шестопал.</i> Как обнаружить фальшивую монету   |
| Ю. Н. Ефремов   |    |   |
| В. Г. Зубов   | 26 | <b>Задачник «Кванта»</b>  |
| П. Л. Капица  |    | Задачи М586—М590; Ф598—Ф602   |
| В. А. Кириллин  | 28 | Решения задач М530, М531, М533, М534, М536, М537; Ф537, Ф542—Ф545                             |
| А. И. Климанов  |    |   |
| С. М. Козел   |    | <b>По страницам школьных учебников</b>  |
| В. А. Лешковцев<br>(зам. главного редактора)                          | 36 | <i>М. Балк, Ю. Ломакин.</i> Доказательство неравенств с помощью производной                   |
| Л. Г. Макара-Линманов   |    |   |
| Н. А. Патрикеева  |    | <b>«Квант» для младших школьников</b>   |
| И. С. Петраков  | 39 | Задачи  |
| Н. Х. Розов   |    |   |
| А. П. Савин   | 40 | <i>А. Дозоров.</i> Можно ли носить воду в решете?   |
| Н. Ш. Слободецкий   |    | <b>Практикум абитуриента</b>  |
| М. Л. Смолянский<br>(зам. главного редактора)                         | 44 | <i>С. Овчинников.</i> Если промежуток не замкнут...   |
| Я. А. Смородинский  | 49 | <i>Л. Асламазов.</i> Закон сохранения импульса. Реактивная сила                               |
| В. А. Фабрикант   |    |   |
| А. Т. Цветков   |    | <b>Заочная школа программирования</b>   |
| М. П. Шаскодьская   | 54 | Урок 3  |
| С. И. Шварцбург   |    | <b>Информация</b>   |
| А. И. Ширшов  | 58 | <i>О. Овчинников, К. Шимбирев, Ю. Широков, Г. Яковлев.</i> Всероссийская олимпиада школьников |
|   | 61 | <i>И. Васильев.</i> Задачи республиканских олимпиад   |
|   |    | <b>Наша обложка (с. 60)</b>   |
|   | 63 | <b>Ответы, указания, решения</b>  |
|   |    | <b>Смесь (с. 7, 14, 25, 38, 57)</b>   |

На первой  
 странице обложки  
 воспроизведены  
 траектории частиц  
 горячей  
 плазмы в диверторе  
 термоядерной  
 установки «Токамак-12».  
 Об этом  
 рассказано  
 в фотоочерке на стр. 15.

---

# Праздник твоего учителя

*Партия и Советское правительство высоко ценят неутомимую, плодотворную деятельность учителей и выражают глубокую благодарность за их самоотверженный труд.*

Из приветствия ЦК КПСС, Президиума Верховного Совета СССР, Совета Министров СССР Всесоюзному съезду учителей.

В октябре наша страна торжественно отмечает традиционный праздник — День советского учителя. Этот праздник — день цветов и улыбок, поздравительных слов и наилучших пожеланий учеников своим наставникам и воспитателям. Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» искренне присоединяются к теплым поздравлениям, адресованным славной армии учителей школ, преподавателей профессионально-технических училищ, всех работников народного образования.

Замечательны страницы истории нашей школы, написанные не одним поколением советских учителей. От ликвидации массовой неграмотности, доставшейся в наследство от царизма, через создание кадров новой рабоче-крестьянской интеллигенции, школа вышла к главной задаче сегодняшнего дня — завершению программы всеобщего обязательного среднего образования, воспитанию гармонической личности активного члена общества развитого социализма. За 1918—1940 годы полную среднюю школу окончили около 1,5 миллиона человек, а за 1976—1978 годы более 8,9 миллиона человек завершили среднее образование. Вдумайтесь в эти цифры! В них — яркая характеристика невиданного роста народного образования в СССР.

Мы уже привыкли к успехам советской школы, ее достижения стали для нас естественными, закономерными. В этом огромное завоевание социализма — право на образование неотделимо от нашего бытия, невозможно представить себе наших детей, юношества без школы, без знаний. Иную картину представляет собой реальность капиталистического мира. По оценке зарубежной печати, в странах капитала около 300 миллионов детей школьного возраста не посещает школ. А вот, например, признание аргентинской прессы: в стране из каждых четырех учащихся один вынужден уходить из начальной школы, не закончив даже второго класса; из ста учеников лишь половине удается получить начальное образование. Причина? Тяжелое материальное положение семей трудящихся, не позволяющее их детям посещать школу.

Роль учителя в нашей жизни переоценить трудно. Ведь это на его глазах, под его непосредственным влиянием проходит самый ответственный период жизни человека — период возмужания, становления личности. Рождение каждого нового гражданина Страны Советов, труженика и творца, в значительной мере неотделимо от кропотливого, поистине самоотверженного труда учителя. Именно поэтому учитель, педагог пользуется любовью и уважением всех советских людей, а его профессиональный праздник стал поистине общенародным.

Но праздник наших учителей — это не только день поздравлений и пожеланий, сколь бы искренними они ни были. В этот день каждый ученик должен особенно четко и честно ответить самому себе на главный вопрос — все ли ты делаешь для того, чтобы труд учителя был более эффективным, легким, радостным? Результаты труда учителя зависят не только от его таланта, знаний, опыта — они зависят и от учеников, от их желания учиться, от их сознательности и понимания дисциплины, от их воли и умения подчас делать не то, что хочется, а то, что необходимо.

Состоявшийся в мае с. г. IV пленум ЦК ВЛКСМ в своем постановлении «Об усилении работы комсомола по коммунистическому воспитанию учащихся общеобразовательных школ и подготовке их к труду» особое внимание обратил на необходимость «воспитывать у учащихся понимание того, что получение всеобщего обязательного среднего образования является гражданским долгом и жизненной потребностью каждого молодого советского человека». Это прежде всего означает, что школьник не может быть пассивной стороной в процессе обучения, воспитания. Он должен активно способствовать созданию атмосферы творчества и заинтересованности в овладении знаниями, принципиально реагировать на случаи недисциплинированности, стремиться к глубокому внутреннему усвоению марксистско-ленинской идеологии и коммунистической морали.

Особые поздравления редакционная коллегия и редакция «Кванта» адресуют сегодня дорогим коллегам — учителям математики и физики. Именно им миллионы школьников обязаны своими знаниями по этим предметам. И именно им тысячи и тысячи школьников обязаны своей любовью к этим наукам, своими первыми успехами. Подметить способности ученика, пробудить в нем интерес к предмету, направить его дальнейшие занятия, помочь превращению интереса к предмету в выбор профессии — сколько все это требует труда, знаний, педагогического мастерства!

Многие скромные школьные учителя математики и физики внесли неоценимый вклад в развитие этих наук — помогли талантливой молодежи найти свое призвание, прийти в большую науку. И нет более приятной, более высокой награды за труд учителя, чем достижения его ученика в математике или физике.

Пройдет не так уж много времени и сегодняшние старшеклассники — читатели «Кванта» окончат школу, выйдут на широкую дорогу самостоятельной жизни. Большинство из них выберет себе специальность, так или иначе связанную с физико-математическими науками. Можно с уверенностью сказать, что они окажутся достойными учениками своих учителей.



А. Шишов, А. Никитин

## Обобщенная сумма углов многогранника

В евклидовой геометрии важное место занимает теорема о сумме углов плоского многоугольника, поэтому естественно возникает вопрос о пространственном аналоге этой теоремы. О таком аналоге и о связанных с ним понятиях рассказывается в этой статье.

### Мера $n$ -гранного угла

Будем измерять плоские и многогранные углы следующим образом. Пусть  $AOB$  — произвольный угол на плоскости. Построим окружность радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $O$  и примем за меру угла  $AOB$  величину отношения длины дуги  $A'mB'$ , находящейся внутри угла  $AOB$ , к длине всей окружности (рис. 1).

При таком измерении углов, например, мера угла в один градус рав-

на  $\frac{1}{360}$ , мера угла в  $\pi$  радиан равна  $\frac{1}{2}$ , а известные теоремы о сумме углов треугольника и сумме углов выпуклого  $n$ -угольника формулируются соответственно следующим образом: величина суммы углов треугольника равна  $\frac{1}{2}$  и величина суммы углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $\frac{n}{2} - 1$ .

Рассмотрим произвольный  $n$ -гранный угол. Вокруг его вершины (а в случае двугранного угла вокруг произвольной точки ребра этого угла) построим сферу и назовем мерой  $n$ -гранного угла величину отношения площади части сферы, находящейся внутри угла, к площади всей сферы (рис. 2).

Если  $n > 2$  и  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — точки пересечения  $n$ -гранного угла со сферой, то через  $|A_1, A_2 \dots A_n|$  обозначим меру нашего  $n$ -гранного угла, а через  $|\hat{A}_1|, |\hat{A}_2|, \dots, |\hat{A}_n|$  обозначим соответственно меры внут-

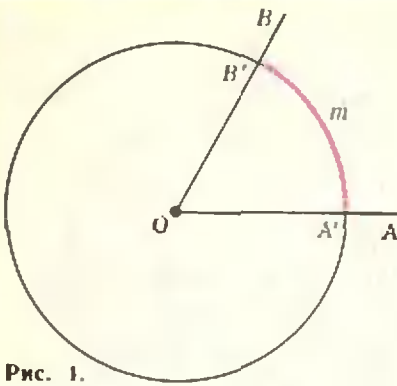


Рис. 1.

ренных двугранных углов  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$   $n$ -гранного угла.

Каждая из граней  $n$ -гранного угла пересекается со сферой по большой окружности и все грани  $n$ -гранного угла отсекают от сферы фигуру, которую обычно называют *сферическим  $n$ -угольником* (см. рис. 2).

На рисунках 3 и 4 показаны сферические 2-угольник и треугольники.

Мера двугранного угла, как видно из рисунка 3, равна мере его линейного угла. Из известной формулы площади сферического треугольника, которая дает нам выражение площади через величины углов, измеренных в радианной мере (см. «Квант», 1977, № 1, с. 9), переходя к нашим обозначениям, получим

$$2|ABC| = |\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - \frac{1}{2}, \quad (1)$$

где  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  — внутренние двугранные углы при ребрах  $OA, OB, OC$  нашего трехгранного угла.

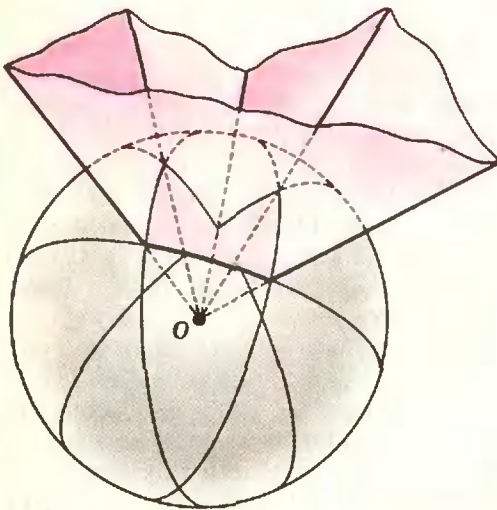


Рис. 2.

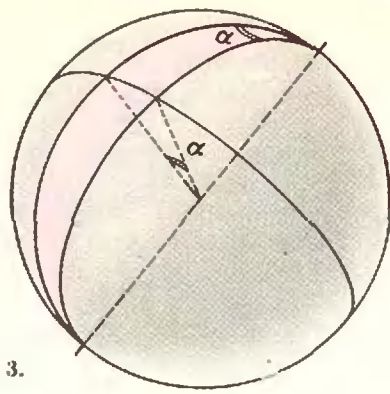


Рис. 3.

Действительно, площадь фигуры  $\Phi_1$ , составленной из двух сферических треугольников  $ADC$  и  $A'D'C$ , совпадает с площадью 2-угольника  $C^*$ , площадь фигуры  $\Phi_2$ , составленной из треугольников  $AD'B$  и  $A'DB$ , — с площадью 2-угольника  $\hat{B}$ ; фигура же  $\Phi_3$ , ограниченная полуокружностями  $ABA'$  и  $A'SA$ , есть 2-угольник  $\hat{A}$ . Пересечение этих трех фигур  $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_2 \cap \Phi_3 = \Phi_3 \cap \Phi_1$  является интересующим нас сферическим треугольником  $ABC$ . Поэтому, вычисляя сумму площадей этих трех фигур, мы трижды, т. е. два лишних раза, посчитаем площадь треугольника  $ABC$ . Вычитая из этой суммы удвоенную площадь треугольника  $ABC$ , мы получим площадь видимой (на рисунке 4) полусферы. Итак,  $\frac{1}{2} = |A| + |B| + |C| - 2|ABC|$ , т. е. справедлива формула (1).

Из равенства (1) следует, что сумма мер внутренних двугранных углов произвольного трехгранного угла на  $\frac{1}{2}$  превышает его удвоенную меру.

\* 2-угольник мы обозначаем так же как соответствующий двугранный угол.

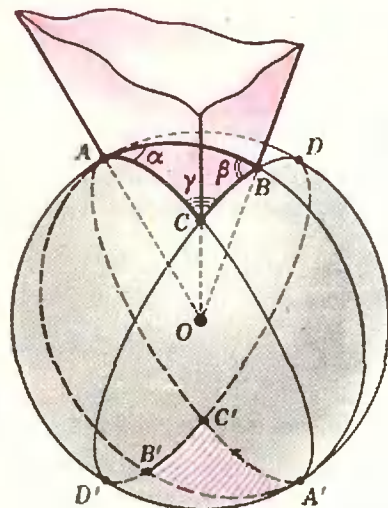


Рис. 4.

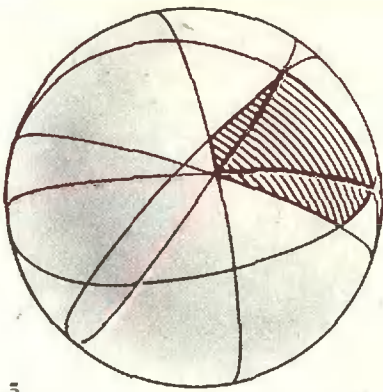


Рис. 5.

Найдем теперь меру выпуклого  $n$ -гранного угла. Заметим, что всякий выпуклый  $n$ -угольник может быть разбит на  $n - 2$  треугольника. Аналогично этому, всякий выпуклый  $n$ -гранный угол ( $n > 2$ ) может быть разбит на  $n - 2$  трехгранных угла, а соответствующий сферический  $n$ -угольник разбивается при этом на  $n - 2$  сферических треугольника (рис. 5). Применяя формулу (1) ко всем этим треугольникам и суммируя, видим, что для сферического  $n$ -угольника  $A_1 A_2 \dots A_n$ , соответствующего некоторому выпуклому  $n$ -гранному углу, выполняется формула

$$|\widehat{A}_1| + |\widehat{A}_2| + \dots + |\widehat{A}_n| - 2|A_1 A_2 \dots A_n| = \frac{n}{2} - 1, \quad (2)$$

то есть сумма мер внутренних двугранных углов  $n$ -гранного угла на  $\frac{n}{2} - 1$  превышает удвоенную меру  $n$ -гранного угла (при  $n > 2$ ).

Величину  $|\widehat{A}_1| + |\widehat{A}_2| + \dots + |\widehat{A}_n| - 2|A_1 A_2 \dots A_n|$

в дальнейшем будем называть избытком многогранного угла  $OA_1 A_2 \dots A_n$ .

**Упражнение 1.** Применяя формулы (1) и (2), найдите а) меру трехгранного угла в вершинах куба; б) меру трехгранного угла в вершинах правильного тетраэдра; в) меру четырехгранного угла в вершинах октаэдра.

### Сумма углов многогранника

Рассмотрим теперь произвольный тетраэдр. Обозначим через  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) величины его трехгранных уг-

лов, а через  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) величины его двугранных углов. Избыток всякого трехгранного угла равен  $\frac{1}{2}$ , поэтому сумма избытков всех

трехгранных углов тетраэдра равна 2. Заметим, что каждый двугранный угол учитывался дважды: сначала при одной вершине ребра, а затем при другой. Таким образом, имеет место равенство  $2 \sum_{j=1}^6 \beta_j - 2 \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2$ .

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^6 \beta_j - \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1. \quad (3)$$

Рассмотрим произвольную выпуклую  $k$ -угольную пирамиду. Обозначим через  $\alpha$  величину  $k$ -гранного угла (при вершине пирамиды), через  $\bar{\alpha}$  — сумму величин всех ее трехгранных углов при основании, через  $\beta$  — сумму величин всех двугранных углов при основании пирамиды и через  $\bar{\beta}$  — сумму величин всех двугранных углов, образованных ее боковыми гранями. Как и в случае тетраэдра, вычислим сумму избытков по всем вершинам пирамиды.

Из формулы (2) следует, что  $\bar{\beta} - 2\alpha = \frac{k}{2} - 1$ , а из формулы (1) получаем, что  $\bar{\beta} + 2\beta - 2\bar{\alpha} = \frac{1}{2} k$ , поэтому

$$\beta - \bar{\alpha} + \alpha = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$\beta + \bar{\beta} - (\alpha + \bar{\alpha}) = \frac{k+1}{2} - 1. \quad (5)$$

Таким образом, из формул (3) и (5) вытекает, что как для тетраэдра, так и для любой выпуклой  $k$ -угольной пирамиды разность между суммой величин всех двугранных углов при основании и суммой величин всех многогранных углов при вершинах есть величина, зависящая только от числа граней пирамиды.

Рассмотрим теперь произвольный выпуклый многогранник с  $n$  гранями (рис. 6). Выберем произвольно внутри него точку  $A$  и соединим ее со всеми точками ребер многогранника. В результате получим разбиение многогранника на  $n$  пирамид.



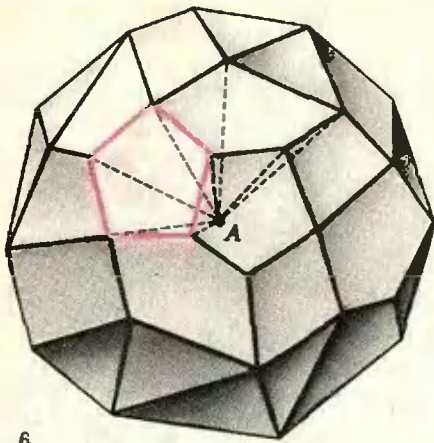


Рис. 6.

Заметим следующее: сумма величин всех многогранных углов этих пирамид с вершинами в точке  $A$  равна  $1$ ; сумма величин всех трехгранных углов при основаниях пирамид совпадает с величиной суммы  $\varphi$  всех многогранных углов при вершинах многогранника; сумма величин всех двугранных углов при основании пирамид из нашего разбиения совпадает с величиной суммы  $\bar{\varphi}$  всех двугранных углов многогранника. Отсюда и из формулы (4) непосредственно получаем, что  $1 - \varphi + \bar{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot n$  или

$$\bar{\varphi} - \varphi = \frac{n}{2} - 1. \quad (6)$$

Заметим, что требование выпуклости многогранника присутствует лишь для простоты изложения. Обобщения в этом направлении читатель может получить самостоятельно.

Теорема об обобщенной сумме углов тетраэдра впервые была доказана де Гюз в 1783 г., дальнейшие обобщения опубликованы Брианшоном в 1837 г.

Удивительное свойство формулы (4) состоит в том, что, в отличие от плоского случая, эта формула остается справедливой и в неевклидовой геометрии.

#### Упражнения

2. а) Найдите обобщенную сумму углов куба и додекаэдра. б) Для этих многогранников найдите сумму мер многогранных углов при вершинах.

3. Используя формулу (1): вычислите сумму избытков многогранных углов выпуклого многогранника, у которого  $P$  ребер и  $B$  вершин. (Ответ.  $P - B$ .)

4. Выведите из упражнения 3 и формулы (6) знаменитую формулу Эйлера, связывающую число граней  $\Gamma$ , число вершин  $B$  и число ребер  $P$  выпуклого многогранника:  $P - B + \Gamma = 2$ .

5. Приведите пример многогранника, для которого  $B - P + \Gamma = 0$ .

## Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М536—М544 и Ф533—Ф547 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

#### Математика

*Н. Абдибеков* (Аркальск) 6а; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) 6—8; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) 7; *З. Алавердян* (Иджеван) 3; *Ф. Алиев* (Баку) 1, 3, 4; *А. Андреасян* (Бюреган АрмССР) 3; *Р. Ардан* (Львов) 6, 7, 1—3; *К. Арстимян* (Кафан) 7; *Н. Арутюнов* (Киев) 2—4; *П. Ахметьев* (Москва) 2—4; *А. Ахметхонин* (Андижан) 6а, 7; *А. Бадилян* (пос. Берд АрмССР) 6—8; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) 6, 7; *К. Бакланов* (Тула) 6а, 7; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) 6—9, 1—4;

*А. Барг* (Николаев) 6, 7; *А. Барышников* (Москва) 6; *Б. Бегун* (Москва) 6, 2; *А. Белюга* (Кривой Рог) 3; *И. Березовский* (Черновцы) 2, 3; *С. Берколайко* (с. Котово Белгородской обл.) 3; *С. Беспамятных* (Артемовский) 6—9, 2; *И. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) 3; *А. Боричев* (Ленинград) 6, 8, 0, 3, 4; *Е. Бравый* (Пермь) 6; *А. Брагинский* (Волгодонск) 6, 0; *Я. Брестман* (Киев) 3; *А. Бурин* (Москва) 6, 1, 4; *Ю. Бусин* (Черемхово) 7, 3; *Э. Вайслер* (Киев) 3; *В. Вардинов* (Таштагол) 6; *С. Василоский* (Ашхабад) 1; *И. Владимиров* (Москва) 2, 3; *А. Владеску* (СРР) 7, 8, 0; *Х. Воктор* (Днепродзержинск) 1, 3; *А. Воронов* (Москва) 6; *М. Гаврилов* (пос. Черноголовка Московской обл.) 6а, 7, 8, 1—4; *Э. Гаджиев* (Тбилиси) 6а, 3; *М. Гайсинский* (Ташкент) 4; *Н. Гасилов* (Баку) 7, 1, 3; *А. Генин* (Москва) 3; *А. Генязюк* (Киев) 3; *А. Гильман* (Москва) 6, 7, 4; *А. Гиллюк* (Флорешты) 2; *Л. Гитлин* (Витебск) 6—8; *Ю. Глухов* (Щелково) 6, 7; *С. Глушко* (Дрогобыч) 3; *О. Горбачев* (Кустанай) 6, 3, 4; *О. Гордиенко* (Павлодар) 7, 8; *М. Горелов* (Белорецк) 6; *Л. Гринаш* (г. п. Дятлово Гродненской обл.) 7; *Н. Гринберг* (Киев) 6, 7, 1; *В. Губи* (Вологда) 6—8, 1—4; *С. Гузов* (Львов)

(Продолжение см. на с. 14)



*И. Урусовский*

## Бег, ходьба и физика

Может ли человек, связанный по рукам и ногам, бегать быстрее «развязанного»? Может! Не верите? Давайте разберемся...

С точки зрения теории колебаний бег человека в системе координат, связанной с бегуном, есть просто болтание ногами. Таким образом, ноги при беге и ходьбе выступают в роли маятников, соединенных шарнирно с корпусом и колеблющихся в поле тяжести около своего положения равновесия — вертикального положения. Но нога — это не «груз на невесомой нити», не математический маятник, который изучают в школе: масса ноги не сосредоточена в одной точке,

а распределена вдоль всей ноги. Нога — это физический маятник.

Важнейшая характеристика всякого маятника — частота его свободных колебаний. Для математического маятника, как известно, частота свободных колебаний равна  $\nu_0 = \sqrt{g/l}$  и зависит только от длины  $l$  маятника. У физического маятника, в отличие от математического, частота свободных колебаний зависит не только от его длины, но и от распределения масс вдоль маятника: чем ближе расположены массы к оси колебаний маятника, тем выше частота его свободных колебаний. Однако и для физического маятника частоту тоже можно записать как  $\nu_0 = \sqrt{g/L}$ , где  $L$  — очень важная характеристика маятника — его приведенная длина. Это длина такого математического маятника, который имеет ту же частоту, что и данный физический.

Для пропорционально сложенных людей приведенная длина ноги-маятника пропорциональна росту. Поэтому частоты собственных колебаний

ног людей разного роста относятся как корни квадратные из отношения (обратного) ростов. Это дает нам очень простой способ определения  $\nu_0$  для человека любого роста. Достаточно измерить собственную частоту колебаний вашей собственной ноги. А это несложно: стоя на одной ноге, покачайте, расслабив мышцы, другой и сосчитайте среднее число колебаний ноги за одну секунду. Например, для человека, имеющего рост 175 см, частота оказывается равной 0,8 Гц. Так что для человека роста  $h(\text{см})$   $\nu_0 = 0,8 \sqrt{175/h}$  (Гц).

Если ногу согнуть, как это бывает при беге, то приведенная длина ноги уменьшится и частота свободных колебаний возрастет примерно на одну четверть.

При ходьбе ноги совершают вынужденные колебания под действием мышц. Известно, что при вынужденных колебаниях их размах зависит не только от величины силы, но и от частоты ее действия. Частоту, при которой получается наибольший размах, называют резонансной частотой.

Резонансная частота  $\nu_p$  почти совпадает с частотой  $\nu_0$  свободных колебаний маятника:

$$\nu_p = \nu_0 \sqrt{1 - \alpha^2},$$

где  $\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln n \approx 0,37 \lg n$ ,  $n$  — число, показывающее, во сколько раз уменьшается амплитуда свободных колебаний за один период. Амплитуда свободных колебаний ноги человека уменьшается за один период приблизительно в два раза, так что в интересующем нас случае  $n \approx 2$ ,  $\alpha \approx 0,11$  и резонансная частота отличается от собственной всего на 0,6%.

Ясно, что с точки зрения экономии сил выгоднее всего ходить, представляя ноги с резонансной частотой. При таком темпе ходьбы запасаемая при подъеме ноги потенциальная энергия наиболее полным образом переходит в кинетическую в момент прохождения ноги через положение равновесия, а через четверть периода (через полшага) кинетическая энергия колебательного движения наиболее полно переходит в потенциальную. Максимальные значения потенциальной и кинетической энергии в этом случае почти одинаковы, и до-

полнительная нагрузка на мышцы ног, связанная с необходимостью «болтать» ногами при ходьбе, минимальна.

Люди действительно ходят, представляя ноги с резонансной частотой. Отклонения «рабочей» частоты от резонансной весьма невелики. И ясно почему: чем больше это отклонение, тем больше добавочная нагрузка на мышцы, связанная с преодолением инерции ног при слишком быстром темпе ходьбы или с преодолением действующей на ноги силы тяжести при слишком медленном темпе.

Ситуация совершенно аналогична знакомой всем практике раскачивания на качелях: сравнительно легко раскатать качели на их резонансной частоте, но если вы будете пытаться раскатать их с частотой, скажем, вдвое большей, то быстро устанете, а качели практически не сдвинутся с места.

Теперь понятно, почему человек, если требуется идти быстрее, прежде всего увеличивает ширину шага, а не темп ходьбы. Скорость движения при этом возрастает, а резонансная частота колебаний ноги изменяется очень мало: из физики известно, что резонансная частота почти не зависит от размаха колебаний.

Кроме увеличения ширины шага, есть еще один резерв ускорения скорости хода: сгибание ноги в колене в то время, когда она оторвана от земли. На ширине шага это, конечно, не отражается, а резонансная частота при этом возрастает, и человек, «подстроив» таким образом резонансную частоту своих ног к более высокому темпу ходьбы, может идти быстрее.

Руки человека также приспособлены для ходьбы. Поскольку ноги движутся в двух разных параллельных плоскостях, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, движение ног вызывает момент сил, стремящийся повернуть корпус человека вокруг вертикальной оси. Чтобы сохранить прямую походку, люди размахивают руками «навстречу» движению ног. При таком движении рук возникает момент сил, противоположный моменту сил, обусловленному движением ног, и компенсирующий его. Заодно уменьшаются

смещения по вертикали центра тяжести тела и связанная с этим работа: ведь раздвигание ног при ходьбе смещает центр тяжести вниз, а раздвигание рук — вверх. Конечно, человек может сохранять прямую походку и не размахивая руками, но лишь ценой дополнительного напряжения мышц, а это невыгодно.

Размахивать руками при ходьбе легче всего, если резонансные частоты колебаний рук и ног одинаковы. Оказывается, эти частоты действительно совпадают. Более того, если человек «подстраивает» резонансную частоту колебаний ног под ускоренный темп движения, сгибая их, то при этом он соответственно сгибает и руки, поддерживая тем самым равенство резонансных частот колебаний рук и ног.

Чем больше скорость ходьбы, тем сильнее приходится сгибать ноги (и руки), чтобы «подстраивать» резонансную частоту под желаемый темп движения. При быстром беге ноги сгибаются под очень острым углом. Но как ни старайтесь, а сложить ногу более чем вдвое и тем самым более чем вдвое уменьшить приведенную длину ноги, вам не удастся (таково уж устройство ног). Значит, нельзя увеличить частоту резонансных колебаний ног более чем в  $\sqrt{2}$  раз. (А если учесть, что во время отталкивания от земли нога должна быть прямой, то станет ясно, что «коэффициент увеличения» заведомо меньше  $\sqrt{2}$ .)

Итак, «подстройка» резонансной частоты под темп ходьбы или бега возможна лишь в довольно ограниченных пределах. И когда приходится бежать в быстром темпе, то запасаемой при каждом подъеме ноги потенциальной энергии не хватает для сообщения ноге во время отталкивания от земли нужной кинетической энергии колебательного движения. Восполнять ее нехватку приходится за счет работы мышц. А требуемая кинетическая энергия быстро растет с увеличением скорости: она пропорциональна квадрату скорости движения бегуна. Если же учесть, что при той же ширине шага скорость пропорциональна числу шагов в секунду,

то выходит, что энергия, «попусту» затрачиваемая на «болтание» ногами при быстром темпе движения, пропорциональна третьей степени скорости. Это означает, что увеличение скорости бега всего на 10% требует увеличения затраты энергии на одну треть, а двукратное увеличение скорости потребовало бы восьмикратного увеличения затрачиваемой энергии. Что же касается требуемых сил, с которыми мышцы должны приводить в движение ноги при быстром беге, то они пропорциональны квадрату скорости.

Такая резкая нелинейная зависимость затрат энергии от скорости обуславливает сравнительно небольшой разрыв в скорости бега на короткие дистанции между рекорсменами и просто хорошими легкоатлетами. Вот почему так трудно «выжать» лишние доли секунды на стометровке. Кстати сказать, это также объясняет, почему при беге на длинные дистанции, когда особенно нужно беречь силы, люди предпочитают бежать, делая сравнительно большие прыжки, но переставляя ноги с частотой, близкой к резонансной. И это несмотря на то, что каждое подпрыгивание требует дополнительной затраты энергии.

Для нахождения количественной зависимости сил, которые должны развивать мышцы, от частоты перестановки ног нужно, кроме частоты свободных колебаний ноги, знать еще и степень затухания этих колебаний. У человека амплитуда колебаний ноги уменьшается примерно в два раза за один период. Сила мышц, движущая ногу вперед и назад, действует периодически, притом можно приближенно считать, что она меняется по синусоидальному закону. Этих данных достаточно, чтобы, пользуясь известными формулами теории колебаний, рассчитать силу, необходимую для любого темпа ходьбы.

Результаты расчета приведены на графике. Видно, что требуемая сила имеет минимум при частоте перестановки ног, равной резонансной, и резко возрастает при отклонении от этого значения. График наглядно показывает, насколько выгоднее ходить, переставляя ноги именно с резонанс-

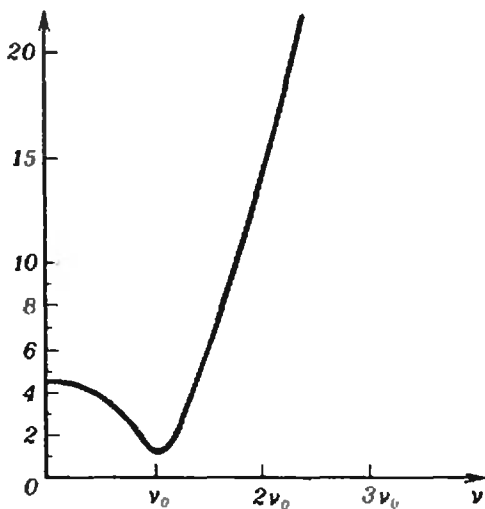


График зависимости сил, приводящих в движение ноги, от темпа ходьбы. Здесь  $\nu$  — частота колебаний ног при ходьбе, то есть число шагов одной ноги за секунду,  $\nu_0$  — резонансная частота колебаний ног. По вертикали отложена величина, показывающая, во сколько раз большие силы должны создавать мышцы по сравнению с ходьбой на резонансной частоте.

ной частотой, и как катастрофически возрастает требуемая сила с увеличением темпа ходьбы. Так, например, при увеличении частоты колебаний ног вдвое по сравнению с резонансной частотой, то есть при двукратном увеличении числа шагов в секунду, силовая нагрузка на мышцы ног при той же ширине шага возрастает в 14 раз! Уже при отклонении темпа ходьбы всего на 10% от резонансной частоты требуемая сила заметно возрастает. Отсюда ясно, почему люди идут, старательно придерживаясь своей резонансной частоты: так легче ходить. (Качественно приведенная зависимость сохраняется и в случае бега. Нужно только учитывать, что резонансная частота при беге из-за сгибания ног в коленях несколько выше, чем при ходьбе).

Чем меньше приведенная длина ног при той же их длине (практически — чем тоньше делаются ноги книзу и чем резче происходит уменьшение их толщины сверху вниз), тем больше резонансная частота колебаний ног и тем большую скорость при тех же усилиях может развивать их обладатель. С другой стороны, чем легче ноги, тем меньше усилий тре-

буется от мышц ног для движения с той же скоростью (поскольку сила пропорциональна весу ноги). Именно поэтому все быстроногие животные (антилопы, гепарды, скаковые лошади, борзые собаки) имеют сильно утончающиеся книзу и сравнительно легкие ноги.

Правда, второе условие имеет меньшее значение по сравнению с первым, поскольку решающую роль в быстроте бега играет резонансная частота колебаний ног. Например, слоны с их массивными, но сравнительно стройными ногами бегают довольно резво, а в Индии выражение «походка, как у слона» — высшая похвала.

Да что там слоны и антилопы! Попробуйте-ка догнать обыкновенного поросенка, который задался целью убежать от вас. Форма ноги поросенка — того, что в обиходе называют окороком, — характеризуется очень резким уменьшением толщины ноги сверху вниз. Окорок нужен поросенку вовсе не для того, чтобы из него делали ветчину, а чтобы резонансная частота ноги была побольше. Короткие ноги поросенка имеют настолько высокую резонансную частоту, что позволяют ему конкурировать в скорости бега с человеком, ноги которого гораздо длиннее.

Итак, решающую роль в быстроте бега и ходьбы играет резонансная частота колебаний ног. Естественно, возникает вопрос: а нельзя ли ее увеличить? Сделать это было бы весьма заманчиво: увеличение резонансной частоты позволило бы людям ходить и бегать быстрее.

В принципе возможны по крайней мере два способа решения проблемы. Первый способ — увеличить силу земного тяготения. Резонансная частота колебаний маятника пропорциональна корню квадратному из ускорения силы тяжести. Поэтому, например, удвоение силы земного тяготения повлекло бы за собой увеличение резонансной частоты колебаний ног в  $\sqrt{2}$  раз. Правда, увеличить силу земного тяготения, мягко говоря, не так просто, а главное, пожалуй, и не стоит. Но для космонавтов, которые когда-нибудь будут разгуливать по другим планетам, во-

прос о зависимости резонансной частоты колебаний ног от ускорения силы тяжести носит далеко не академический характер: ведь на каждой планете свое ускорение силы тяжести.

Второй способ решения проблемы несравненно проще. Если запасаемой при каждом подъеме ноги потенциальной энергии не хватает для сообщения ноге требуемой скорости колебательного движения, то, связав ноги эластичным резиновым шнуром или присоединив к ногам каким-либо иным способом упругие элементы, стремящиеся возвратиться в положение равновесия отклоненную от этого положения ногу, мы тем самым увеличим потенциальную энергию, накапливаемую (за счет кинетической) при подъеме ноги. В результате уменьшится бесполезная добавочная нагрузка на мышцы, связанная с необходимостью преодолевать инерцию ног при ходьбе и беге. Прикрепленные к ногам упругие элементы будут играть роль резервуаров потенциальной энергии, пополняемых и опустошаемых дважды за каждый период колебаний, и, как во всех колебательных системах, они будут повышать резонансную частоту колебаний. Чем больше упругость этих элементов (например, чем толще связывающий ноги резиновый шнур), тем выше резонансная частота. Значит, чтобы ходить и бегать быстрее, нужно... связать ноги (разумеется, упругой связью).

В одной старой немецкой сказке повествуется о человеке, который мог бегать на редкость быстро. Чтобы ходить с нормальной скоростью, он привязывал к ногам гири. Скореход знал, что делает. Ведь тем самым он увеличивал приведенную длину ног и, следовательно, уменьшал их резонансную частоту колебаний, а вместе с ней — и скорость хода. А вот если бы вместо гирь он прикреплял к ногам упругие элементы, то бегал бы еще быстрее. Впрочем, можно подозревать, что секрет быстрого бега скорехода как раз и состоял в том, что его ноги имели гораздо более высокую резонансную частоту колебаний, чем у других людей.

Любой здоровый человек тоже может стать скореходом, повысив с помощью упругих элементов резонансную частоту колебаний ног.



нансную частоту колебаний ног. Представим себе такого человека, принимающего участие в легкоатлетических состязаниях. Перед стартом он связывает себе ноги и, чтобы как-то объяснить свое странное поведение, скромно поясняет судьям, что он-де бежит очень быстро и, чтобы не убежать слишком далеко от своих соперников, имеет обыкновение слегка связывать ноги. Заняв свое место на старте, наш спортсмен с некоторым усилием отводит одну ногу назад, тем самым «заряжая» ее потенциальной энергией. Как только в момент старта он отрывает эту ногу от земли, нога «выстреливается» вперед, как из рогатки. Кстати, при этом сокращается и время разгона. Конечно, бегун со связанными ногами придет к финишу первым. Вот только остановиться ему будет труднее, и он пробежит несколько лишних шагов: ведь связанные эластичной резинкой ноги «бегут сами». Кстати, уж если быть последовательным до конца, то с целью облегчения бега следует прикреплять упругие элементы и к рукам, которые, как уже было отмечено, играют определенную роль при ходьбе и беге. Это можно сделать, например, привязав руки (повыше кисти) к поясу эластичными резинками. Общий вывод таков: если «связать» человека по рукам и ногам, он будет бегать быстрее.

Когда я изложил эти соображения своим товарищам по работе, они посмеялись, но согласились со мной, а самый решительный из них, заявив, что нечего тянуть резину, пошел к экспериментаторам и принес от них резиновый амортизационный канат. Такой канат состоит из множества тонких эластичных резинок. Нарезав эти тонкие резинки на куски длиной по 75 см, мы изготовили из них несколько жгутов-колец толщиной примерно в один сантиметр. Техника изготовления была простой: из каждого куска, связав его концы, сделали кольцо, а из семи-восьми десятков таких колец составили одно толстое кольцо-жгут. Дабы жгут не рассыпался, его пришлось перевязать в нескольких местах (точно так же, как перевязывают прутья при изготовлении веника).

Если такое кольцо надеть на обе ноги, то в положении, когда ноги составлены вместе, кольцо окажется нерастянутым, но будет плотно обхватывать ноги, не провисая. При ходьбе или беге оно будет периодически растягиваться. Возникающие при этом упругие силы будут стремиться вернуть ноги в положение равновесия, что и приведет к повышению резонансной частоты колебаний ног. Одно такое кольцо, обхватывающее ноги на уровне икр, повышает резонансную частоту в полтора раза.

Чтобы кольцо не перетягивало кровеносные сосуды, мы надевали его поверх жестких повязок, сделанных из картона или другого подходящего материала. Наконец, чтобы кольцо не съезжало с повязок (вверх по ноге), мы прикрепляли его к повязкам в двух точках, а другие две точки кольца соединяли бечевками с обувью. Бечевки препятствовали смещению точек кольца, к которым они были прикреплены, вверх по ноге, но не стесняли движения кольца в горизонтальной плоскости, поскольку угол между бечевкой и ногой всегда мал и бечевка остается практически параллельной ноге.

Резиновые кольца можно надевать на ноги как выше, так и ниже колен — в любом случае резонансная частота колебаний ног будет возрастать. Но поскольку кинетическая



Способ крепления резинового кольца к ногам. 1 — эластичное резиновое кольцо, 2 — жесткая повязка, 3 — точка крепления резинового кольца к повязке, 4 — бечевка.

энергия колебательного движения нижней части ноги (считая от колена и ниже) гораздо больше (в пять-шесть раз) кинетической энергии колебаний верхней части ноги, то наиболее целесообразно надевать резиновые кольца ниже колен.

Я пробовал ходить в описанной выше амуниции. Скорость хода действительно возрастает. Ощущение такое, что кто-то помогает переставлять ноги, а когда нужно остановиться, ноги непроизвольно идут «сами» еще несколько лишних шагов.

Надетые на ноги резиновые кольца стремятся вернуть ноги в положение равновесия и при ходьбе или беге давят попеременно то на переднюю, то на заднюю сторону каждой ноги, осуществляя тем самым своего рода массаж мышц ног. Все же при длительной ходьбе или беге такой «массаж» может оказаться нежелательным. Поэтому при ходьбе и беге на большие расстояния представляется предпочтительным такой способ прикрепления упругих элементов к ногам, при котором упругие элементы вообще не касаются мышц, около которых много кровеносных сосудов. Пожалуй, самый про-

стой способ такого крепления — это привязать концы эластичного резинового шнура к ремешкам, плотно обхватывающим ступни ног. Чтобы шнур не болтался под ногами, когда он оказывается в нерастянтом состоянии, к его середине прикрепляется тонкий резиновый шнурок, который в слегка растянутом состоянии привязывается другим своим концом к поясу. При этом середина шнура оказывается в приподнятом положении, и шнур не мешает движению. Заметим, однако, что при большом натяжении упругий элемент будет стремиться поворачивать ступни ног вокруг вертикальной оси, и возникающие при этом силы придется компенсировать напряжением мышц ног. Иначе характер движения будет напоминать бег полицейских псов из Страны Дураков, которые, как свидетельствует А. Н. Толстой в «Золотом ключике», бегали «особым хитрым галопом, заноса задние ноги вбок». Можно устранить этот недостаток, заменив шнур, прикрепляемый в определенных точках к ступням ног, резиновым кольцом, обхва-

тывающим ступни и обкатывающим их при движении.

Эту конструкцию можно применить и для лошадей, привязав эластичный шнур к их копытам (один шнур на передние копыта, другой — на задние).

Если когда-нибудь в технике станут применяться шагающие аппараты, экипажи и роботы, то следует иметь в виду, что, связав им «ноги» упругой связью, можно будет увеличить их скорость передвижения или сэкономить потребляемую на движение энергию.

Конечно, надо помнить, что для ускорения движения «связывать» ноги вовсе не обязательно. Конструкция упругих элементов и способы крепления их к ногам могут быть самыми разнообразными. Однако у всех подобных систем должно быть одно общее свойство: при отклонении ноги от положения равновесия упругие элементы должны создавать упругую реакцию, стремящуюся возвратить ногу в равновесное положение, повышать резонансную частоту колебаний ног как физического маятника.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 7)

2—4; В. Дашевский (Москва) 7; В. Джалолян (с. Урцадзор АрмССР) 7, 8; Б. Добров (Ангарск) 2; С. Довыш (Москва) 6—9, 1—3; А. Дороговцев (Киев) 2; А. Дубинский (Москва) 2; К. Дубровский (Славянск) 3; Д. Дужев (с. Махмудагар АзССР) 2, 3; Д. Думиев (Масалынский р-н АзССР) 7; И. Елишевич (Чернигов) 6, 7; А. Ермолин (Петрозаводск) 6—8, 1, 3, 4; А. Забарин (Заволжск) 3; И. Зверович (Минск) 6, 7; М. Златоустовский (с. Правая Хава Воронежской обл.) 3; Зозуля (Баку) 6а; В. Золотаревский (Киев) 1, 3, 4; К. Ильин (Вильнюс) 7; Ф. Кабдыкаиров (Алма-Ата) 6—8, 3; А. Кагарманов (Белорецк) 6, 7; П. Калугин (Москва) 1—4; Р. Камалян (Ереван) 7, 2, 3; А. Канель (Москва) 6—8; А. Каплан (Сумгаит) 6а, 7, 8, 1—4; А. Келарев (Свердловск) 6, 7, 1—4; Е. Кнаус (Павлодар) 6; А. Коган (Москва) 6, 7, 9; Д. Коломийцев (Сумгаит) 6а; А. Коломийцев (Ангарск) 6, 7; И. Колпаков (Сочи) 7, 3; Ю. Кондрахин (Новосибирск) 7, 2; М. Концевич (Химки) 6—9, 1, 3, 4; Д. Корнеев (Саратов) 2; А. Король (Ташкент) 6, 7; О. Кравец (Воронеж) 6а, 7, 8, 2; И. Крочук (Львов) 6; О. Крылов (В. Устюг) 6, 7, 4; И. Кузь (Львов) 6а, 1;

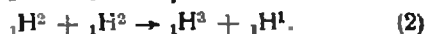
Е. Кузьмин (Череповец) 6; А. Кулеско (Донецк) 6, 8, 9; В. Кухарчук (с. Малый Шпаков Ровенской обл.) 6, 3; А. Кушиеров (Москва) 6, 7; А. Куц (Днепропетровск) 7; Б. Липидус (Москва) 6б; Ю. Лапуста (Тернополь) 6а, 7; Б. Лейтес (Москва) 6, 7, 3, 4; А. Липин (Ленинград) 8, 1, 3; С. Логунов (Москва) 7, 8; А. Лукашов (Лебедин) 6; Ю. Макаров (Ленинград) 1; Г. Малахсян (с. Цалка ГрССР) 7; Р. Мамедов (Баку) 6, 7, 1, 3; М. Марьянович (СФРЮ) 3; А. Мегрецкий (Ленинград) 2—4; М. Меламед (Запорожье) 2; В. Мельник (Гайсин) 6а, 7, 3; Г. Мильников (пос. Черногородка Московской обл.) 1; А. Миндлин (Саратов) 6, 8; С. Макроусов (Ленинград) 4; Г. Молчанов (Саратов) 2; С. Морейно (Москва) 6, 7; П. Мулин (Иркутск) 6а; Р. Набоков (Саратов) 2, 3; Н. Нагнибида (Черновцы) 3; О. Намазов (с. Фахрало ГрССР) 6а, 7, 3; Н. Нишарадзе (Тбилиси) 3; А. Николаев (дер. Октябрь ТАСССР) 7; А. Ницоговский (Воронеж) 3; С. Новаковский (Саратов) 2; С. Новиков (Херсон) 6а, 9, 3; В. Ольхов (Горький) 3; А. Опарин (Горький) 6—8; А. Павлычев (Рига) 6, 7, 2; Е. Палаш (Ворошиловград) 3; М. Пантеев (Москва) 1; А. Пантелеев (Ростов-на-Дону) 7; А. Пашкевич (ПНР) 2; В. Пащенко (Киев) 6; К. Пелих (Павловский Посад) 6, 7; Г. Пельц (Ленинград) 7; Г. Перельман (Ленинград) 8; (Продолжение см. на с. 25)



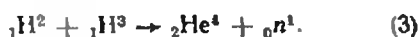
В. Лешковцев, М. Прошин

## На пути к энергетике будущего

Развитие цивилизации неразрывно связано с увеличением производства энергии. Наиболее заманчивым путем является использование энергии синтеза ядер тяжелого водорода, запасы которого необычайно велики (см. «Физика-10», § 145). При этом происходят следующие ядерные реакции:



В первой из них два ядра тяжелого водорода превращаются в ядро легкого гелия и нейтрон, во второй — в ядро сверхтяжелого водорода и протон. Одновременно освобождается большое количество энергии. Еще больше энергии можно получить за счет реакции между тяжелым водородом и искусственно созданным сверхтяжелым водородом:



Так как атомные ядра имеют положительные электрические заряды и отталкивают друг друга, реакции синтеза могут идти только в веществе, ядра которого обладают большой кинетической энергией, достаточной для совершения работы против сил отталкивания. А это значит, что указанные ядерные реакции могут реализоваться, когда вещество нагрето до очень высокой температуры. Поэтому такие реакции называются термоядерными. Для осуществления интенсивных термоядерных реакций (1—2) нужно нагревать тяжелый водород до нескольких сотен миллионов градусов и поддерживать такую температуру хотя бы в течение нескольких секунд. Реакцию (3) можно наблюдать при температуре около 100 миллионов градусов. При таких температурах вещество переходит в состояние плазмы — атомы водорода распадаются на составляющие их электроны и атомные ядра. Для того чтобы плазма мгновенно «не убежала» на холодные стенки окружающего ее сосуда, надо поместить ее в магнитное поле. При этом сила Лоренца, действующая на каждую заряженную частицу, заставит ее «навиваться» на линии

магнитной индукции, препятствуя уходу частиц на стенки сосуда (см. «Физика-9», § 93).

Создание термоядерного реактора является чрезвычайно сложной научно-технической задачей. Ученые и инженеры уже почти тридцать лет занимаются поисками путей ее решения. Наиболее заметные успехи в исследованиях управляемого термоядерного синтеза достигнуты на установках типа «Токамак», впервые созданных в Советском Союзе под руководством академика Л. А. Арцимовича. Токамак по сути дела представляет собой трансформатор, у которого вторичная обмотка имеет всего лишь один виток. Этот виток образован замкнутой кольцевой камерой в форме тора (бублика). Камеру заполняют водородом при низком давлении. Пропуская ток большой силы по первичной обмотке такого трансформатора, вызывают электрический пробой в заполняющей камере газе. Водород ионизуется, а текущий через него вторичный ток нагревает его до очень высокой температуры. Кольцевой ток под действием магнитных сил стягивается в тонкий плазменный шнур, так как параллельные одинаково направленные токи притягиваются (см. «Физика-9», § 88). Для усиления магнитной изоляции водородной плазмы используется дополнительное магнитное поле, создаваемое электромагнитом, катушки которого намотаны на внешнюю поверхность тора. Слово «токамак» образовано от первых слогов названий основных элементов установки (ТОроидальная КАмера в МАГнитном поле). Сейчас в различных странах работают более 50 токамаков.

Есть принципиально иной путь к управляемому термоядерным реакциям. Термоядерный синтез может быть осуществлен на основе периодических микровзрывов небольших порций твердого термоядерного топлива (водорода). Лучи мощного лазера или плотные пучки электронов, ускоренных до скоростей, близких к скорости света, в принципе, могут сжимать и нагревать твердую мишень с термоядерным топливом до таких высоких значений плотности и температуры, при которых термоядерная реакция успеет пройти в веществе мишени за доли наносекунды. Этот путь также исследуется советскими учеными.

В нашей стране работы по управляемому термоядерным реакциям ведутся широким фронтом. В этом фотоочерке рассказывается о некоторых термоядерных исследованиях, осуществляемых в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова. Фотографии выполнены В. Ободзинским.

Читателям, которые хотели бы детальнее познакомиться с рассматриваемыми здесь проблемами, рекомендуем статьи: Б. Кадомцев. Путь к термоядерной энергетике. «Наука и жизнь», 1976, № 1, с. 44; Б. Кадомцев. Физика токамаков. «Природа», 1979, № 2, с. 21.

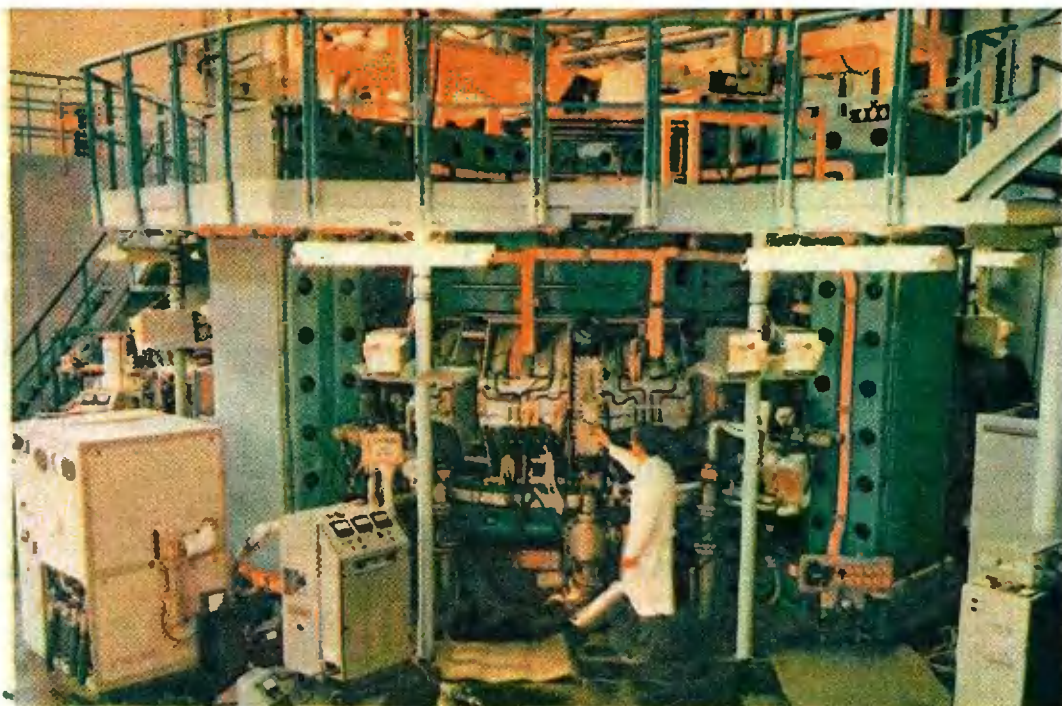


Рис. 1. Одной из крупнейших в мире термоядерных установок является «Токамак-10», вступивший в строй в 1975 году. Температура плазмы в нем достигает 13 миллионов градусов. Плотность плазмы близка к ее значению у будущих тех-

нических термоядерных реакторов. Для создания таких реакторов, в принципе, достаточно значительно увеличить размеры тороидальной камеры. Поэтому «Токамак-10» можно считать прообразом будущих термоядерных электростанций.

Рис. 2. В последнее время разрабатывается метод дополнительного нагрева плазмы с помощью «впрыскивания» в нее ядер водорода, разогнанных до высоких скоростей на специальных ускорительных устройствах. В высокотемпературной плазме такие частицы образуют еще более горячую компоненту.

Сталкиваясь с частицами более холодной компоненты, они отдают им часть своей кинетической энергии, тем самым повышая температуру плазмы. Подобный способ нагрева плазмы изучается на изображенной здесь установке «Токамак-11» с двумя инжекторами (впрыскивателями) ускоренных ядер водорода.



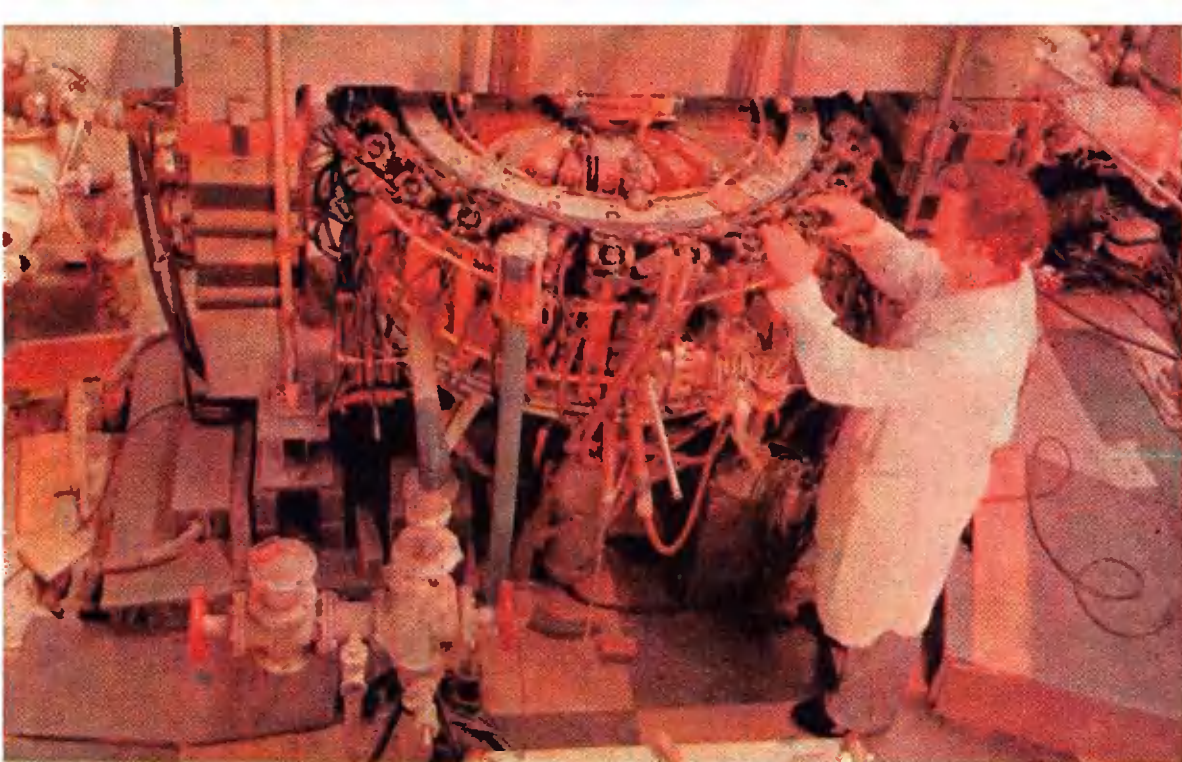


Рис. 3. На установке «Токамак-3» исследуется еще один способ дополнительного нагрева водородной плазмы — с помощью электромагнитных колебаний высокой частоты. Как показывают расчеты и эксперименты, энергия таких колебаний в конце концов переходит в кинетическую энергию частиц плазмы.

Рис. 4. В обмотках электромагнитов, создающих изолирующее магнитное поле, теряется много энергии, расходуемой на нагревание проводов. В установке «Токамак-7» испытываются обмотки из сверхпроводника, который охлажден до температуры жидкого гелия, равной 4,2 К. В сверхпроводящих обмотках нет потерь энергии на нагревание проводов. Поэтому они будут использоваться и на будущих термоядерных электростанциях. По своим размерам «Токамак-7» близок к «Токамаку-10». На рисунке воспроизведена только главная его часть — торондавальная камера со сверхпроводящей обмоткой.

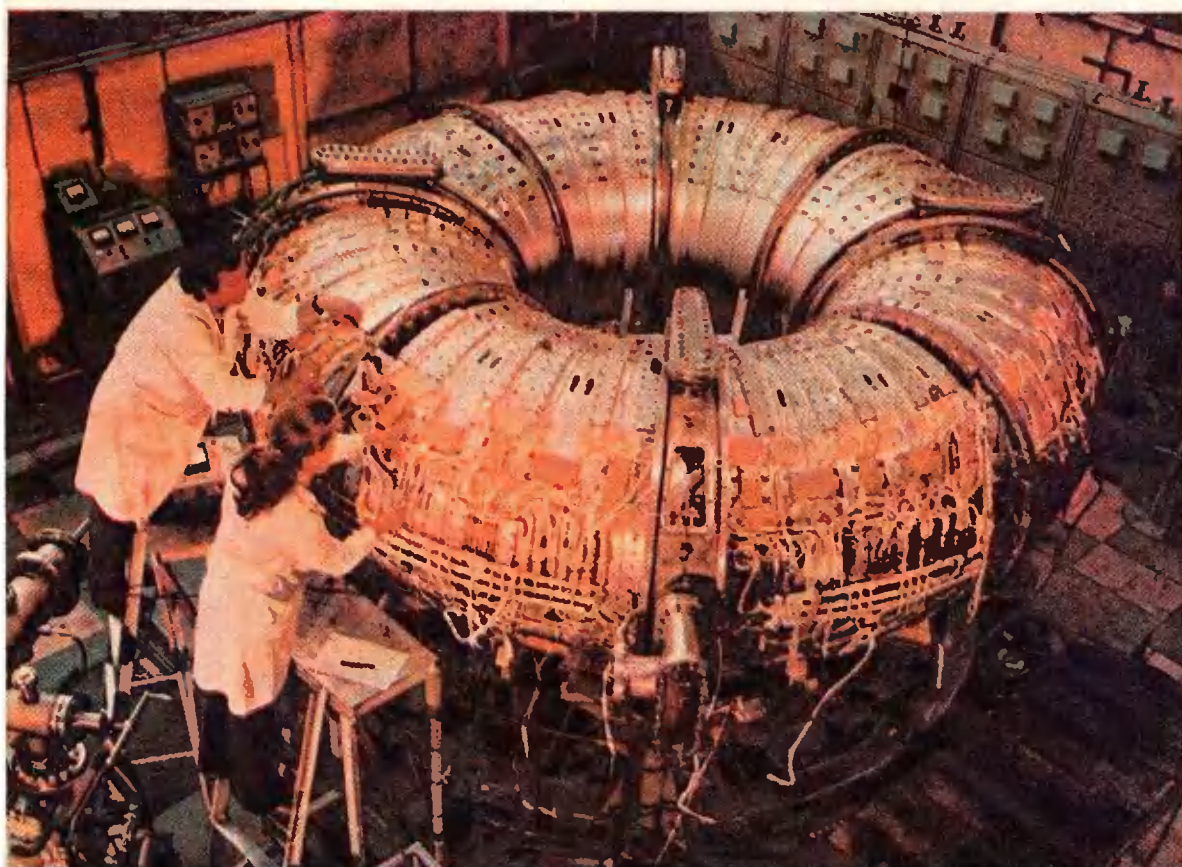


Рис. 5. Плазму можно нагревать до огромной температуры лишь при высокой степени ее чистоты. Даже десятые доли процента примесей тяжелых элементов (Mo, Sg, Fe), которые попадают в плазму со стенок камеры, не позволяют «зажечь» термоядерную реакцию. На установке «Токамак-4» ведутся исследования по предварительной очистке стенок камеры нагреванием ее до температуры 800–1000°C. На установке «Токамак-12» (см. рис. 6) создана специальная конфигурация магнитного поля, которая позволяет отводить загрязненную плазму с поверхности плазменного шнура в специальное устройство — дивертор, где она осаждается на стенки. Так защищают более глубокие слои плазмы от загрязнения. Траектории движения частиц плазмы в диверторе видны на рисунке, помещенном на первой странице обложки.



Рис. 6. Для того чтобы термоядерный реактор производил значительное количество энергии, необходимо не только нагреть плазму до гигантской температуры, но и сохранить такую температуру до тех пор, пока прореагирует заметная доля атомных ядер. Время жизни горячей плазмы зависит от геометрии камеры. Эта зависимость изучается на установке «Токамак-12», где плазменный шнур имеет в своем сечении форму овала.

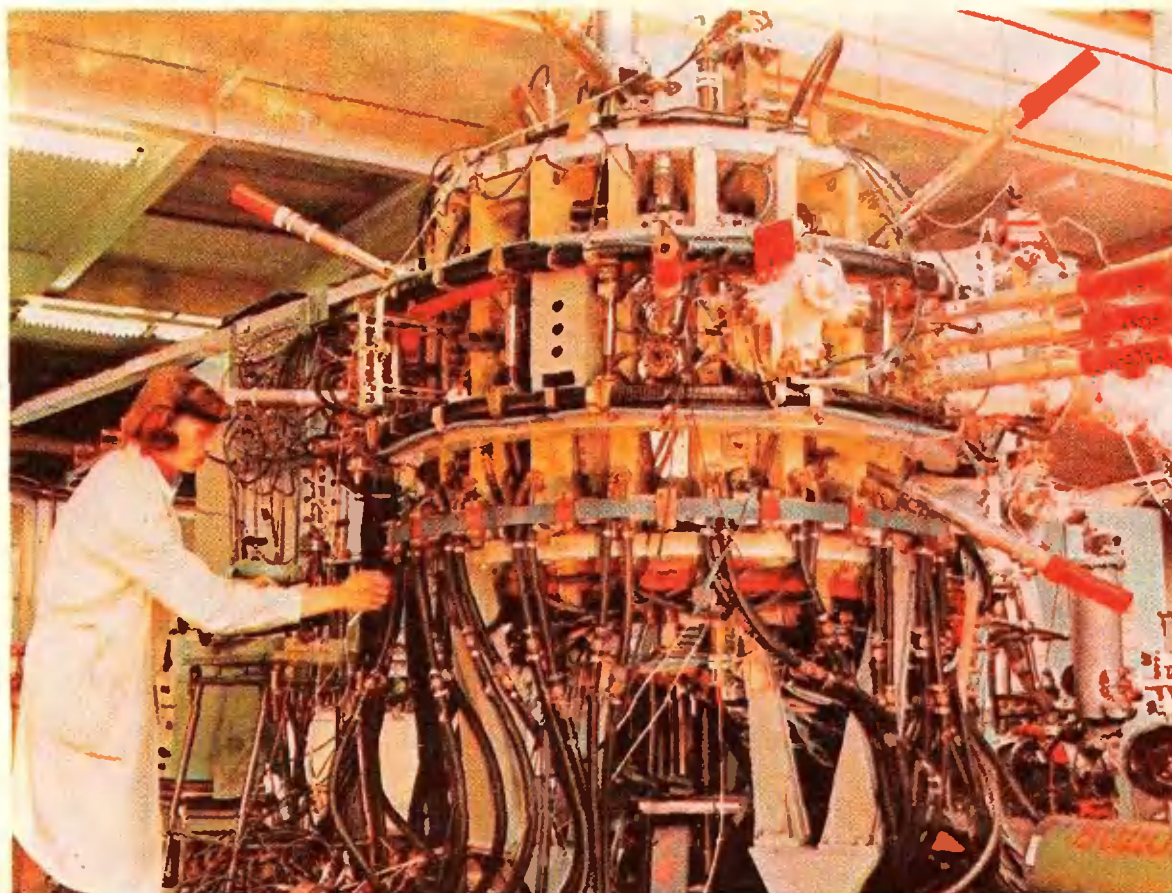
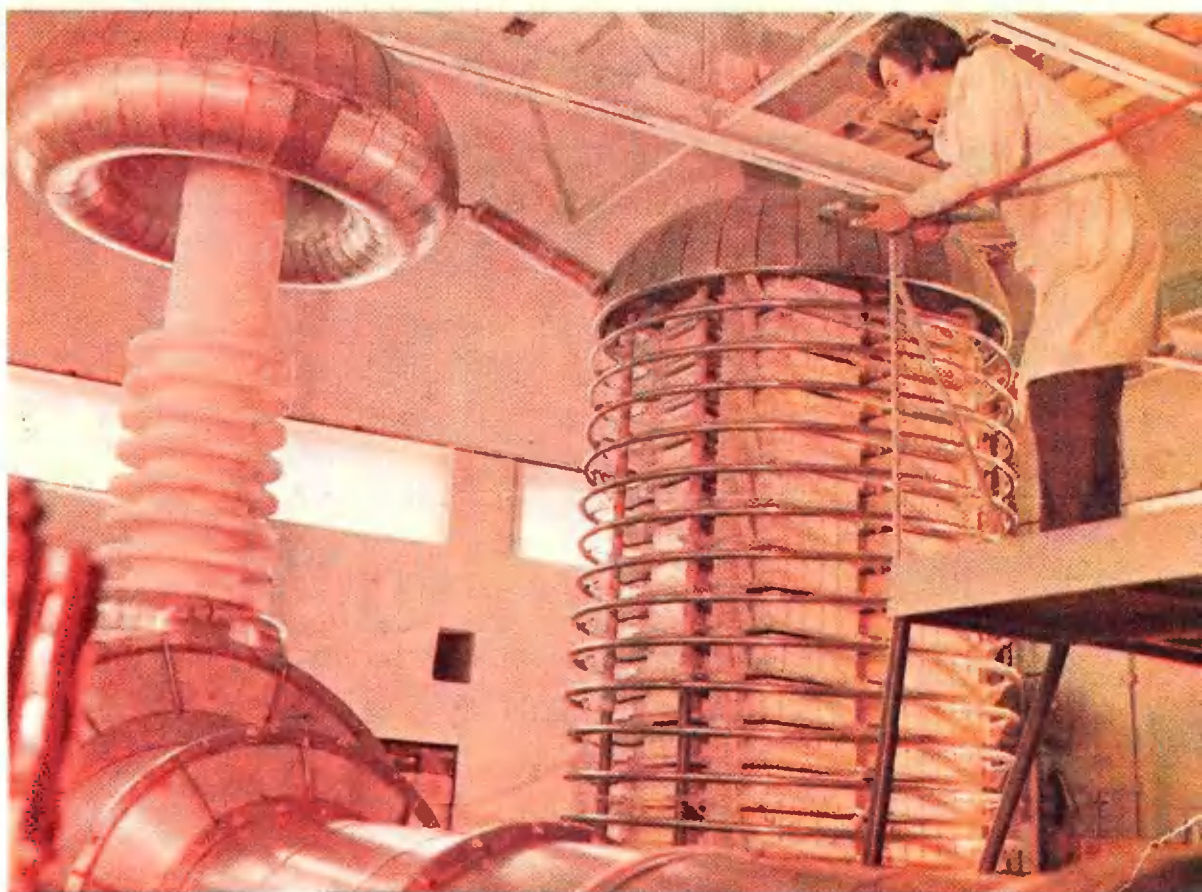




Рис. 7. Установки «Токамак» — не единственный тип устройств, на основе которых ученые надеются создать термоядерный реактор. Другой тип термоядерных установок — ловушки с магнитными пробками. Частицы плазмы удерживаются в них благодаря отражению от «магнитных зеркал» — областей с повышенной индукцией поля, в которых происходит сжатие силовых линий. На рисунке представлена одна из таких установок «Огра-3Б».

Рис. 8. Установка «Ангара-1» используется для нагрева плазмы пучком электронов, ускоренных до околосветовых скоростей. Она создает импульсы электронов с энергией порядка 2,5 Мэв при токе до 400 кА. Длительность импульса  $6 \cdot 10^{-8}$  с. На рисунке показан высоковольтный генератор установки.





**Задача 1**  
 Определите плотность неизвестной жидкости.



## Олимпиада дома

Читатель, знакомый с нашим журналом, наверное, обратил внимание на одну характерную особенность Лаборатории «Кванта». Наблюдения, опыты, которые предлагает наша лаборатория, не требуют, как правило, никакой специальной сложной аппаратуры, их можно проводить, пользуясь «подручными» средствами. Но это совсем не означает, что опыты эти тривиальны. Зачастую они требуют изобретательности, настоящего экспериментаторского мастерства.

Материалы, которые мы помещаем в Лаборатории «Кванта», можно разделить на две категории. Первая — это опыты и наблюдения над окружающей нас природой. Они привлекают ваше внимание к привычным, на первый взгляд, простым явлениям, которые при внимательном изучении раскрывают удивительную гармонию, взаимосвязанность в природе. Вторая категория — это опыты, которые дают вам возможность упрочить знания, приобретаемые на уроках физики, почувствовать «своими руками», что стоит за тем или иным физическим законом. Именно с этой целью мы помещаем в этом номере три экспериментальные задачи, которые предлагались участникам Всероссийской олимпиады школьников по физике в 1979 году (об олимпиаде рассказывается в этом номере журнала на с. 58). Для их решения требуются и сообразительность, и умелые руки, и прочные знания школьного курса физики. Проверьте себя!

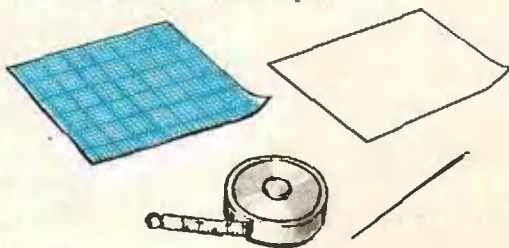
**Оборудование:** сосуд с водой, сосуд с неизвестной жидкостью (с раствором соли), мензурка, пробирка.

**Задача 2**  
 Сравните коэффициенты поверхностного натяжения воды и мыльного раствора.



**Оборудование:** стеклянная трубка, пластилин, кусок проволоки, сосуд с водой, сосуд с мыльным раствором, линейка.

**Задача 3**  
 Определите разрешающую способность глаза и исследуйте ее зависимость от диаметра отверстия в экране, помещенном перед ним.



**Оборудование:** лист миллиметровой бумаги, лист белой бумаги, игла, рулетка или метровая линейка.



Г. Шестопал

## Как обнаружить фальшивую монету

Представьте себе, что на стол высыпана кучка совершенно одинаковых по виду монет, но вам сказали, что одна из этих монет — фальшивая. Она отличается от остальных монет по весу, но вам не сообщили, легче она или тяжелее. В вашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Как нужно действовать, чтобы выделить эту монету и выяснить ее тип (то есть узнать, легче она или тяжелее) за минимальное число взвешиваний?

Многие из вас, наверное, уже решали эту задачу для 12 монет. На рисунке приведено одно из решений этой задачи. Трех возможным исходам первого взвешивания соответствуют три различных варианта

выбора монет для второго взвешивания: на рисунке левая стрелка соответствует случаю, когда перетянула левая чашка, средняя стрелка — равновесию, правая — случаю, когда перетянула правая чашка. Аналогичным образом изображены девять вариантов выбора монет для третьего взвешивания. (На рисунке монеты перенумерованы, буквы л и т означают соответственно, легкая и тяжелая.)

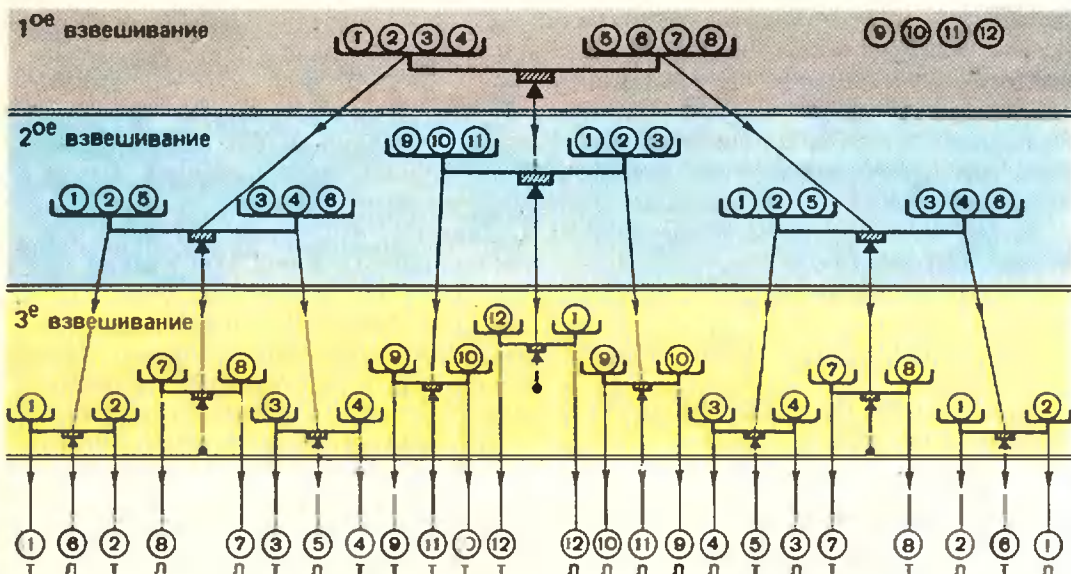
Характерной особенностью этого решения является зависимость выбора монет для очередного взвешивания от результата предыдущего.

Поставим теперь задачу в общем виде.

*Имеется  $m \geq 3$  одинаковых по виду монет. Все монеты, кроме одной, имеют одинаковый вес, а одна отличается от них по весу, но неизвестно, в какую сторону. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти эту монету и выяснить ее тип? \**

Эта задача более тридцати лет назад привлекла к себе внимание многих математиков, главным обра-

\* Очевидно, для значений  $m < 3$  задачу не имеет смысла решать: при  $m = 1$  монета будет фальшивой, но неизвестного типа; при  $m = 2$  монеты будут иметь разный вес, и выбрать из них фальшивую невозможно.



зом в Англии и США. В 1945 году в английском журнале «The Mathematical Gazette», похожем по своему направлению на «Квант», появилось решение этой задачи. Его автор Р. Л. Гудстейн впоследствии стал известным специалистом в области математической логики.

Гудстейн указал метод определения фальшивой монеты и ее типа за  $n \geq 3$  взвешиваний, если число монет

$$m \leq \frac{1}{2}(3^n - 2n + 3)$$

(заметьте, что для  $n = 3$   $m \leq 12$ ).

Однако оказалось, что для  $n > 3$  его решение не является лучшим: за  $n$  взвешиваний можно выделить фальшивую монету и определить ее тип из большего числа монет:

$$m \leq \frac{1}{2}(3^n - 3).$$

Это обнаружили независимо друг от друга сразу несколько математиков, и в следующем 1946 году тот же журнал опубликовал довольно длинный перечень их имен и разных ступеней успеха, достигнутых на поприще розыска фальшивой монеты. В этом же номере журнала напечатано самое лучшее решение — решение Ф. Дж. Дайсона, будущего известного физика-теоретика.

Идея Дайсона основана на использовании трюичной системы счисления: все монеты маркируются специально выбранными трюичными числами — маркерами, позволяющими удобно отражать ход последовательных взвешиваний. Особенно привлекательным при этом методе решения оказывается независимость выбора монет для последующего взвешивания от результата предыдущих.

В последующие годы были напечатаны другие решения этой задачи\*), а метод Дайсона был незаслуженно забыт.

Поэтому интересно рассказать о нем подробно.

Все решение Дайсона можно разбить на два этапа.

А. Если

$$m = \frac{1}{2}(3^n - 3), \quad n = 2, 3, \dots,$$

то для выделения одной фальшивой монеты из общего числа  $m$  монет и определения ее типа достаточно произвести  $n$  взвешиваний.

Б. Если число монет

$$m < \frac{1}{2}(3^n - 3), \quad m \geq 3,$$

то для достижения той же цели  $n$  взвешиваний также будет достаточно.

Рассмотрим каждый этап в отдельности.

### Первый этап

Пусть число монет  $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$ .

Рассмотрим все  $n$ -значные «трюичные числа» (наборы из цифр 0, 1, 2) 00...00, 00...01, ..., 22...22. Их  $3^n$ . Используем их для маркировки монет следующим образом: в качестве маркеров возьмем все эти числа, за исключением трех, состоящих из одинаковых цифр: 0...0, 1...1, 2...2.

«Построим» все маркеры в пары: в одну пару «поставим» два дополнительных маркера — таких, у которых цифры соответствующих разрядов в сумме составляют 2 (другими словами, дополнительными будут те маркеры, сумма которых равна 22...22).

Назовем маркер *правым*, если в нем первая слева пара неравных цифр — 01, 12 или 20. В противном случае маркер будем называть *левым*. Очевидно, в каждой паре дополнительных маркеров один всегда будет правым, другой — левым.

Заметим, что число пар маркеров как раз равно общему числу монет  $m$ . Перенумеруем монеты номерами от 1 до  $m$  и произвольно сопоставим каждой монете одну пару маркеров. Например, 12 монет можно «замаркировать» так, как показано в таблице.

Обозначим соответственно через  $M(i, 0)$ ,  $M(i, 1)$  и  $M(i, 2)$  множество монет, для которых  $i$ -й разряд соответствующего им правого маркера равен 0, 1 или 2.

\*) Например, в книге А. Яглома, П. Яглома «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973).



Номер монеты	Левый маркер	Правый маркер
1	211	011
2	100	122
3	022	200
4	212	010
5	101	121
6	020	202
7	210	012
8	102	120
9	021	201
10	221	001
11	110	112
12	002	220

Легко видеть, что число монет в каждом из множеств  $M(i, 0)$ ,  $M(i, 1)$  и  $M(i, 2)$  одинаково и что эти множества не имеют общих элементов (см., например, таблицу).

Метод взвешивания монет, придуманный Дайсоном, состоит в следующем:

Производится последовательно  $n$  взвешиваний монет.

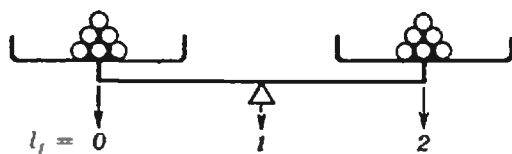
При  $i$ -м взвешивании ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на левую чашку весов кладутся все монеты множества  $M(i, 0)$ , на правую чашку — все монеты множества  $M(i, 2)$ . Результат каждого взвешивания будем обозначать цифрой 0, если перевесила левая чашка весов, цифрой 1, если обе чашки имеют одинаковый вес, и цифрой 2, если перевесила правая чашка (см. рис.). Результат  $i$ -го взвешивания обозначим через  $l_i$ .

Из цифр  $l_1, l_2, \dots, l_n$  составим маркер

$$l = l_1 l_2 \dots l_n^*).$$

Оказывается,  $l$  — маркер фальшивой монеты  $F$  и если  $l$  — правый маркер, то  $F$  тяжелее остальных монет, а если  $l$  — левый маркер, то  $F$  легче остальных монет.

Действительно, посмотрим, что происходит, когда производится  $i$ -е



\* Докажите, что это действительно маркер, т. е. что цифры  $l_1, l_2, \dots, l_n$  не могут быть одинаковыми.

взвешивание. В результате этого взвешивания весы либо остались в равновесии, либо одна из чашек перевесила.

Если весы остались в равновесии, то фальшивой монеты на них нет, следовательно, она — в множестве  $M(i, 1)$ . Но это означает, что  $i$ -й разряд ее правого (и левого) маркера равен 1, на что и указывает результат взвешивания  $l_i = 1$ .

Если одна из чашек весов перевесила, то фальшивая монета лежит на весах. Пусть, например, перевесила правая чашка, т. е.  $l_i = 2$ . Этот результат возможен в двух случаях:

— фальшивая монета лежит на правой чашке (тогда она тяжелее остальных монет), значит, она находится во множестве  $M(i, 2)$ ,  $i$ -й разряд ее правого маркера равен 2, следовательно, результат взвешивания совпадает с  $i$ -м разрядом ее правого маркера;

— фальшивая монета лежит на левой чашке (тогда она легче остальных монет), значит, она находится во множестве  $M(i, 0)$ , следовательно,  $i$ -й разряд ее правого маркера равен 0 и результат взвешивания совпадает с  $i$ -м разрядом ее левого маркера.

Совершенно аналогичен «симметричный» случай, когда перевесит левая чашка весов ( $l_i = 0$ ).

Поэтому, действительно, сформированный в результате последовательных взвешиваний маркер  $l = l_1 l_2 \dots l_n$  есть маркер фальшивой монеты, притом правый в случае более тяжелой монеты и левый — в случае более легкой, что и требовалось доказать.

Интересно отметить, что тип монеты, как правило, определится раньше, чем произведены все взвешивания, — как только в процессе формирования маркера  $l$  появятся две различные цифры.

Существенной особенностью описанного метода, как уже было отмечено раньше, является то обстоятельство, что выбор монет для каждого взвешивания не зависит от результатов предыдущих взвешиваний.

Например, для 12 монет, замаркированных так, как показано в таблице, нужно проделать такие три взвешивания: (1,4,7,10), (3,6,9,12); (3,6,9,10), (2,5,8,12); (3,4,8,12), (2,6,7,11).

## Второй этап

Коротко наметим метод Дайсона для случая  $m < \frac{1}{2}(3^n - 3)$ . Если в этом случае монетам сопоставлять маркеры произвольно, то в множествах  $M(i, 0)$  и  $M(i, 2)$  может оказаться разное число монет. Поступим поэтому следующим образом. Разобьем все маркеры на группы по шесть: в одну группу отнесем правые маркеры, получающиеся друг из друга циклической заменой цифр  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 0$  и соответствующие им левые маркеры.

В каждой группе окажется по три правых маркера и три левых маркера. Группу, содержащую правые маркеры 00 ... 01, 11 ... 12, 22 ... 20, выделим особо. Разобьем монеты на группы по три, пока это возможно, и замаркируем их следующим образом. Монетам из одной группы сопоставим пары маркеров из одной группы, а для остатка, если он есть, используем пары маркеров из выделенной группы. Если останется одна монета, не вошедшая в тройки, то сопоставим ей правый маркер 11 ... 12, а если две, — то правые маркеры 00 ... 01 и 22 ... 20 (и соответствующие левые маркеры).

При такой маркировке первые  $n - 1$  взвешиваний производятся по старым правилам. Как производить последнее взвешивание, сообразите самостоятельно.

Метод Дайсона описан. Убедимся теперь, что он в определенном смысле является наилучшим. А именно, покажем, что если из  $m$  монет можно выделить  $n$  взвешиваниями фальшивую монету и определить ее тип, то  $2m \leq 3^n - 3$ . Разумеется, мы не будем учитывать возможного «везения»: при нем для определения фальшивой монеты из любого числа монет может хватить и двух взвешиваний.



Итак, предположим, что  $n$  взвешиваний достаточно.

Занумеруем монеты числами 1, 2, ...  $m$  и приготовим  $2m$  бумажек. Напишем на них все возможные варианты: первая монета легче, первая монета тяжелее, вторая монета легче и т. д. Ясно, что при этом все  $2m$  бумажек окажутся использованными и ни один из возможных вариантов не будет упущен. Будем обозначать, как мы условились выше, результат взвешивания цифрами 0, 1 или 2. Каждое взвешивание показывает, что часть возможных ответов не подходит, а часть — остается под подозрением. Отберем монеты для первого взвешивания. Не производя его фактически, напишем на каждой из бумажек тот результат первого взвешивания, который оставляет ее под подозрением. Ясно, что на каждой бумажке будет написана одна из цифр 0, 1 или 2. Таким образом, все бумажки будут разбиты на три группы. Поэтому в наиболее многочисленной группе окажется не меньше  $2m/3$  бумажек. Значит, как бы мы ни организовывали первое взвешивание, может оказаться, что после него под подозрением останутся не меньше  $2m/3$  бумажек.

Аналогично, второе взвешивание рассортирует эту подозрительную группу на три подгруппы. Поэтому в наиболее многочисленной из них окажется не меньше  $2m/9$  бумажек. Точно так же после  $n$  взвешиваний мы можем получить  $2m/3^n$  подозрительных бумажек в одной группе. Следовательно, если  $2m/3^n > 1$ , то фальшивая монета и ее тип, вообще говоря, за  $n$  взвешиваний определены быть не могут. Поэтому если  $n$  взвешиваний достаточно, то  $2m \leq 3^n$ .

Но это еще не все! Мы не разобрались еще со случаем  $2m = 3^n - 1$  (четное число  $2m$  не может равняться ни  $3^n - 2$ , ни  $3^n$ ). Для него изложенных выше соображений недостаточно.

Рассмотрим более внимательно первое взвешивание. Ясно, что число бумажек, на которых написана цифра 0, равно числу бумажек, на которых написана цифра 2. Пусть тех и других — по  $p$  штук, тогда на  $2m - 2p$  бумажках будет написана 1.

Заметим, что  $p$  — четное число. Действительно, если на левой и правой чашке весов лежит по  $k$  монет, то  $p = 2k$ . Если  $p$  или  $2m - 2p$  больше  $3^{n-1}$ , то по рассмотренному для определения нужной бумажки может не хватить оставшихся  $n - 1$  взвешиваний. Если же  $p = 2k \leq 3^{n-1}$  и  $2m - 2p \leq 3^{n-1} - 1$ , то, поскольку  $3^{n-1}$  — число нечетное,  $p \leq 3^{n-1} - 1$ ,  $2m - 2p \leq 3^{n-1} - 1$ . Но тогда  $2m = (2m - 2p) + 2p \leq 3^{n-1} - 1 + 2(3^{n-1} - 1) = 3^n - 3$ . Итак, если  $n$  взвешиваний достаточно, то  $2m \leq 3^n - 3$ .

В заключение — несколько задач, которые могут быть решены методом Дайсона.

### Задачи

1. Имеются две группы из  $m_1$  и  $m_2$  монет, причем известно, что одна монета — фальшивая, она легче, если принадлежит первой группе, и тяжелее, если принадлежит второй группе. За какое минимальное число взвешиваний можно выделить фальшивую монету?

2. Пусть, кроме групп  $m_1$  и  $m_2$ , имеется группа  $m_3$  из эталонных (заведомо не фальшивых) монет. Сколько взвешиваний необходимо в этом случае?

3. Имеется  $m$  монет, среди которых заведомо есть фальшивая (известно, более легкая или более тяжелая), и еще одна эталонная монета. Можно ли определить фальшивую монету и ее тип за  $n$  взвешиваний, если  $m = (\frac{1}{2})(3^n - 1)$ ? Сколько взвешиваний необходимо для других  $m$ ?

4. Дано  $m$  монет и известно, что фальшивых монет среди них — не больше одной. За какое число взвешиваний можно найти фальшивую монету и определить ее тип или убедиться, что фальшивой монеты нет?

5. В случае  $2m < 3^n - 3$  последнее взвешивание зависело, вообще говоря, от результатов предыдущих взвешиваний. Постарайтесь добиться того, чтобы оно зависело от результатов возможно меньшего числа взвешиваний.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 7, 14)

А. Петросьян (Ереван) 6а; Л. Петрусевич (дер. Козлы Минской обл.) 6; И. Пиковский (Киев) 3; А. Подвязников (Мосальск) 7; В. Подстригач (Львов) 6, 8, 1; А. Пеллюкин (Киев) 6, 7; А. Попов (Москва) 7; В. Потапов (Новосибирск) 3; С. Пошехов (Энгельс) 7; Г. Пуричамшивили (Тбилиси) 6а; Б. Рабинович (Тула) 6, 7, 1, 3, 4; В. Радченко (Киев) 6а, 2—4; М. Рейтман (Москва) 6а, 7, 2; С. Рехвишвили (Павлодар) 6; И. Ройzman (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 6—8; Н. Рубинштейн (Ленинград) 6а; Б. Рублев (Киев) 2, 3; И. Савенков (р. п. Лысье горы Саратовской обл.) 6, 7; Г. Самельсон (Ленинград) 3; М. Севрюк (Москва) 6—9, 1—3; П. Селиванов (Семипалатинск) 6а, 7, 2; А. Сивацкий (Ленинград) 6а, 7, 9, 0, 2, 3; А. Смирнов (Курган) 6, 7; А. Смыслов (Коиьково) 6; А. Сромин (Ленинград) 6, 7; С. Стадниченко (Москва) 6—8, 3; Ф. Сукочев (Ташкент) 6—9; Н. Сумовский (Львов) 7, 8; О. Тавгень (Минск) 6а, 7; К. Таталян (Ереван) 6; Л. Тепер (с. Ялтушков Винницкой обл.) 6, 7; К. Терехов (Рязань) 6а; В. Титенко (дер. Блужа Минской обл.) 7; А. Уливанов (Горький) 9; В. Уманский (Баку) 6, 7; Р. Ушаков (Киев) 3; Д. Файнгауз (Ленинград) 6, 7, 0; В. Фарбер (Баку) 3; А. Фатуллаев (Баку) 3; Н. Федин (Омск) 2; А. Федоров (Москва) 7, 3; О. Хоружий (Черновцы) 7; С. Хосид (Алма-Ата) 6а, 7; Э. Цихистави (Телави) 3; И. Черная (Ленинград) 3; О. Чечел

(Москва) 6—8, 1, 4; А. Шагинян (Ереван) 7; П. Шаприн (Киев) 7; Н. Шаровет (Москва) 6, 7, 2, 4; Ю. Ширман (Харьков) 6; Г. Штерн (Орск) 6а; М. Яковлев (Кемерово) 2; А. Ялышев (Тула) 6, 7; Л. Яновская (Харьков) 7; А. Яценко (Тбилиси) 7.

### Физика

Почти все читатели справились с задачами Ф 539 и Ф 542. Остальные задачи правильно решили:

В. Абиджаев (Львов) 33; Е. Александрова (Глазов) 35, 40, 41; Ю. Анисимов (Торопецкий р-н Калининской обл.) 35; А. Арбатский (Благовещенск-на-Амуре) 40, 41; А. Багиров (с. Кировка АзССР) 40; Л. Бараз (Свердловск) 38—41; И. Баранец (п. Дзержинский Московской обл.) 38—41; А. Барзыкин (п. Черноголовка Московской обл.) 33, 35—41; А. Белоусов (Калининград) 36; А. Васильев (Выру) 40, 41; Д. Виноградов (Дзержинск) 35; М. Гаврилов (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 38—44, 47; М. Гольцман (Днепропетровск) 43, 44, 47; И. Голиц (Новосибирск) 38, 41; В. Горпинченко (Кольчугино) 40; И. Даниловский (Горький) 33, 38; В. Дидух (Львов) 35, 37, 38, 40—44, 47; С. Довбыш (Москва) 33, 35, 38—41, 47; С. Довженко (Донецк) 34—36, 38—41; Е. Емельянов (Москва) 43, 47; А. Ермолин (Петрозаводск) 36, 38; В. Жордочкин (Орск) 38; А. Журавлев (Ленинград) 38—41; Э. Зерныш (п. Кузьмовка Ленинградской обл.) 40, 41; Е. Зудин (Александров) 34, 35, 37, 40, 41—44, 46; С. Зург (п. Черноголовка Московской обл.) 40; А. Новайта

(Окончание см. на с. 38)

# задачник Кванта

## Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М586, М587» или «Ф598». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи этого номера предлагались на Всероссийской олимпиаде школьников этого года.

Числа в скобках обозначают класс, в котором предлагались эти задачи.

М586—М590; Ф598—Ф602

**М586.** В треугольнике  $ABC$ , у которого  $\hat{B}=60^\circ$ , провели биссектрисы  $AD$  и  $CE$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Докажите, что  $|OD|=|OE|$ . (8)

**М587.** Дана тройка чисел  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Разрешается любые два из них заменить двумя такими: и их суммой, деленной на  $\sqrt{2}$ , и их разностью, также деленной на  $\sqrt{2}$ . Можно ли, проделав эту процедуру несколько раз, получить тройку чисел  $1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ ? (9)

**М588.** а) Через точку, взятую внутри произвольного тетраэдра, параллельно его ребрам проведены отрезки с концами на гранях тетраэдра. Докажите, что сумма всех шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им ребер всегда равна трем.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольника (на плоскости). (9)

*Э. Ясиновский*

**М589.** На плоскости дан набор из  $n$  векторов, длина каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор  $n$  векторов, сумма которых имеет длину

а) не превосходящую  $\sqrt{n}$ ;

б) не превосходящую  $\sqrt{2}$ . (9)

*П. Гусятников, А. Плоткин*

**М590.** а) Найдите наименьшее значение выражения  $|\cos x| + |\cos 2x|$ . Докажите, что для любого числа  $x$  и любого натурального числа  $n$  сумма

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \dots + |\cos 2^n x|$$

б) не меньше  $\frac{n}{4}$ ;

в) \* не меньше  $\frac{n}{2}$ . (10)

*П. Гусятников*

**Ф598.** Сосуд глубины  $H$  заполнен жидкостью, плотность которой линейно меняется от  $\rho_0$  на поверх-

ности до  $\rho$  на дне сосуда. В сосуд погружают два маленьких шарика одинакового объема  $V$ , связанных тонкой невесомой нерастяжимой нитью длины  $l$ . Плотность одного шарика  $\rho_1$ , плотность другого —  $\rho_2$ . Через некоторое время шарики устанавливаются так, как показано на рисунке 1. Найти силу натяжения нити. (8)

О. Овчинников

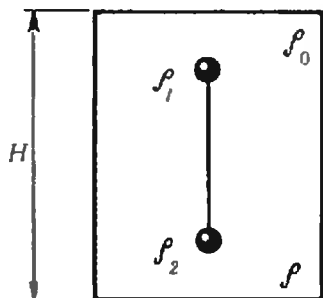


Рис. 1.

**Ф599.** Через блок, укрепленный в потолке, перекинута веревка, на которой груз массы  $M$  уравновешен лестницей с человеком массы  $m$ . По какому закону должен двигаться человек относительно лестницы, чтобы реакция блока на потолок равнялась нулю? Блок невесом, веревка абсолютно гибка, нерастяжима и невесома. (8)

А. Варгик

**Ф600.** В схеме, приведенной на рисунке 2, ключ попеременно замыкают и размыкают в те моменты, когда напряжение на первом конденсаторе равно нулю. Нарисовать график зависимости напряжения на катушке индуктивности от времени. (10)

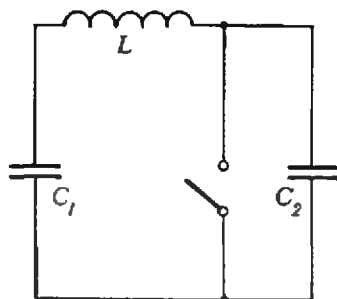


Рис. 2.

**Ф601.** На Луне в вертикальном цилиндре, закрытом тяжелым поршнем, находится аргон при температуре  $T_1$ . Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. На поршень кладут осторожно второй такой же поршень. Определите температуру  $T_2$  газа при новом равновесном положении поршня. Теплоемкость поршня и цилиндра, а также теплоотдачу, не учитывать. Газ считается идеальным. (9)

**Ф602.** К цепи, состоящей из резистора с сопротивлением  $R$  и источника с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r=R/3$ , присоединяют конденсаторы с емкостями  $C_1$  и  $C_2$ , замыкая клеммы 1—2, 3—4, 5—6 (рис. 3). После замыкания напряжение на конденсаторе  $C_1$  оказывается равным  $\mathcal{E}/2$ , причем потенциал клеммы 3 выше потенциала клеммы 2. Определите, какой заряд  $q_0$  был на конденсаторе  $C_2$  до замыкания. (9).

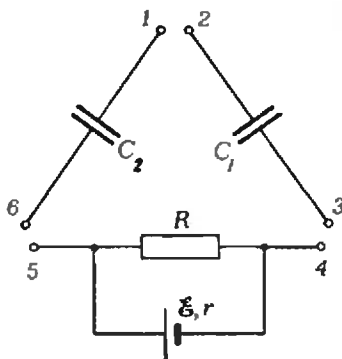


Рис. 3.

## Решения задач

М530, М531, М533, М534, М536, М537;  
Ф537, Ф542—Ф545

**М530.** На прямоугольном листе бумаги в клетку некоторые клетки закрашены в черный цвет. Затем происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: клетки, имевшая четное число черных соседей, становится белой, а имевшая нечетное число черных соседей — черной. (Соседями считаются клетки, имеющие общую сторону.)

а) Докажите, что если множество  $V$  черных клеток при перекрашивании не изменяется (рис. 1, а), то в  $V$  — четное число клеток.  
б) Пусть при перекрашивании множество  $V_1$  черных клеток переходит в  $V_2$ ,  $V_2$  — в  $V_3$ , ...,  $V_{r-1}$  — в  $V_r$ , а  $V_r$  — снова в  $V_1$  (рис. 1, б). Докажите, что общее число черных клеток во множествах  $V_1, V_2, \dots, V_r$  четно.

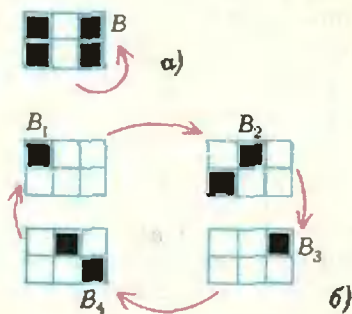


Рис 1.

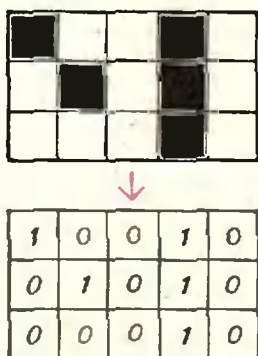


Рис 2.

Заменим наш лист бумаги таблицей из нулей и единиц: если клетка черная, напишем на ее месте единицу, а если белая — ноль (рис. 2). Определим для каждой клетки сумму ее соседей «по модулю 2», то есть по следующему правилу:

$$\begin{aligned} 0+0 &= 1+1=0; \\ 1+0 &= 0+1=1. \end{aligned}$$

Сумму соседей данной клетки назовем ее ореолом, а вместо слов «черная клетка» будем писать «1-клетка».

Из условия задачи следует, что состояние клетки (т. е. записанное в ней число) в некоторый момент времени равно ее ореолу в предыдущий момент.

а) Если множество  $V$  «1-клеток» при перекрашивании не изменяется, то ореол любой «1-клетки» множества  $V$  равен 1. Сложим ореолы всех «1-клеток». Каждая сторона, общая для двух «1-клеток», вносит в эту сумму (всех ореолов) две единицы; поэтому сумма всех ореолов равна сумме четного числа единиц, то есть равна нулю. Но так как ореол каждой «1-клетки» равен 1, получаем, что клеток в  $V$  — четное число.

б) Будем писать  $A \rightarrow B$ , если при перекрашивании таблица  $A$  переходит в таблицу  $B$ . Назовем суммой таблиц  $A$  и  $B$  таблицу  $A+B$ , получающуюся по клеточным сложением чисел таблиц  $A$  и  $B$  (по указанным выше правилам; см. рис. 3).

**Л е м м а.** Если  $A \rightarrow A_1$ ,  $B \rightarrow B_1$ , то  $A+B \rightarrow A_1+B_1$ .

Это следует из того, что при сложении ореолы клеток тоже складываются.

Приступим к решению задачи б). Пусть

$$V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_r \rightarrow V_1.$$

Используя лемму, получаем:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &\rightarrow V_2 + V_3 \rightarrow \dots \rightarrow V_r + V_1 \rightarrow V_1 + V_2; \\ V_1 + V_2 + V_3 &\rightarrow V_2 + V_3 + V_4 \rightarrow \dots \rightarrow V_r + V_1 + V_2 \rightarrow V_1 + \\ &\quad + V_2 + V_3; \end{aligned}$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_r \rightarrow V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_r.$$

Из последней строчки и задачи а) следует, что в таблице  $V_1 + V_2 + \dots + V_r$  — четное число «1-клеток». Заметим теперь, что число «1-клеток» в таблице  $A+B$  равно сумме чисел «1-клеток» в таблицах  $A$  и  $B$  минус четное число (получающееся из-за того, что  $1+1=0$ ); поэтому четность числа «1-клеток» в таблице  $A+B$  и суммарного числа «1-клеток» в таблицах  $A$  и  $B$  одинакова. Поскольку в таблице  $V_1 + V_2 + \dots + V_r$  — четное число «1-клеток», получаем, что и общее число «1-клеток» в множествах  $V_1, V_2, \dots, V_r$  четно.

Задача М530 решена. Но в связи с ней возникает много интересных вопросов. Например, чему может равняться  $\tau$ , то есть каким может быть период превращений множества «1-клеток» данной таблицы? Как будет происходить «эволюция» для таблиц «непрямоугольного» вида? Прямоугольные таблицы поддаются исследованию с трудом. Это объясняется «неравноправностью» их клеток: разные клетки имеют разное число (от двух до четырех) соседей. Но если из прямоугольной таблицы склеить тор (бублик), то у каждой клетки будет уже по четыре соседа. Для тора уже удастся кое-что доказать: например, установлено, что на торе, склеенном из квадрата  $(2^n+1) \times (2^n+1)$ , длина периода  $\tau$  обязательно равна делителю числа  $2^n-1$ . Но возникают новые вопросы: возможны ли для данного тора в с е т а к и е периоды  $\tau$ ? Например, на торе, склеенном из квадрата  $65 \times 65$ , существуют периоды длины 1 и 63, но неизвестно, существуют ли перио-

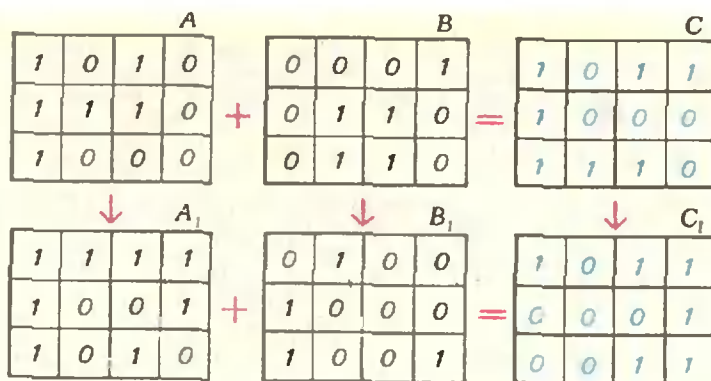


Рис. 3.

ды длины 3, 7, 9 и 21. Продвинувшись в решении задачи на торе помогает аналогичная задача на окружности из  $n$  клеток (похожая задача M19 была разобрана в «Кванте», 1970, № 4).

Р. Измайлов



**M531.** Из пунктов A и B не одновременно выехали навстречу друг другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно (с теми же скоростями). Доехав до своих пунктов A и B, они опять развернулись и второй раз встретились в точке D; здесь они вновь развернулись и т. д. В какой точке отрезка AB произошла их 1978-я встреча?

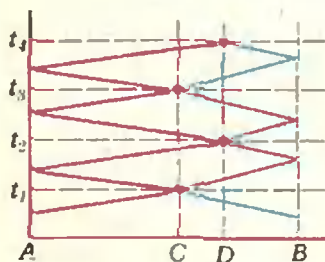


Рис. 4.

Лучше всего решать эту задачу с помощью графиков движения. Постоянство скорости движущейся точки означает, что ее график движения образует один и тот же угол с осью времени  $t$  (рис. 4). Пусть моменты встреч —  $t_1, t_2, t_3, \dots$ . Ясно, что оба графика движения на участках  $t_1 < t \leq t_2$  и  $t_2 < t < t_3$  идут симметрично относительно прямой  $t = t_2$ , поэтому третья встреча произойдет в той же точке C, где и первая. Точно так же прямая  $t = t_3$  является осью симметрии графиков движения при  $t \leq t_3$  и  $t \geq t_3$ ; поэтому четвертая встреча произойдет в той же точке D, что и вторая, и т. д.: каждая нечетная встреча будет происходить в точке C, каждая четная, в том числе и 1978-я, — в точке D.

Из нашего решения ясно также, что числа  $t_1, t_2, t_3, \dots$  образуют арифметическую прогрессию: встречи происходят через равные промежутки времени  $d = t_{n+1} - t_n$ , и вся картина полностью повторяется с периодом  $T = 2d$ .

Это наблюдение — частный случай такого полезного факта: если график функции  $y = f(x)$  симметричен относительно прямых  $x = a$  и  $x = b$  (то есть  $f(a+x) = f(a-x)$  и  $f(b+x) = f(b-x)$ ), то функция  $f$  — периодическая с периодом  $2|b-a|$  (в нашей задаче роль  $x$  играет время  $t$ ).

Н. Васильев



**M533.** Назовем выпуклый многоугольник особым, если некоторые три его диагонали пересекаются в одной внутренней точке. Докажите, что у каждого особого семиугольника найдется вершина A, обладающая таким свойством: для любого  $\epsilon > 0$  вершину A можно сдвинуть на расстояние, меньшее  $\epsilon$  (не меня остальных вершин), так, что полученный семиугольник будет неособым.

Назовем диагональ выпуклого шестиугольника главной, если по обе стороны от прямой, на которой лежит эта диагональ, расположены по две вершины шестиугольника. Если  $MP$  — побочная (не главная) диагональ выпуклого шестиугольника и  $N$  — вершина, смежная с вершинами  $M$  и  $P$  (рис. 5), то во внутренних точках с диагональю  $MP$  пересекаются лишь диагонали, выходящие из  $N$ . Поэтому никакие другие две диагонали не пересекаются с  $[MP]$  в общей внутренней точке. Иначе говоря, единственной тройкой диагоналей выпуклого шестиугольника, которая может иметь общую точку внутри шестиугольника, является тройка его главных диагоналей.

Пусть теперь  $B_1 B_2 \dots B_7$  — произвольный выпуклый семиугольник. Рассмотрим выпуклые шестиугольники  $B_1 \dots B_5 B_6$  и  $B_1 \dots B_5 B_7$  (рис. 6). Диагонали  $[B_1 B_4]$  и  $[B_2 B_5]$  являются в них главными. Обозначим через  $P$  точ-

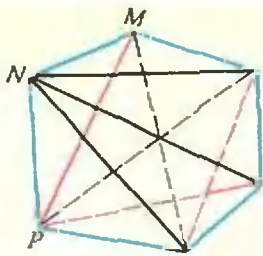


Рис. 5.

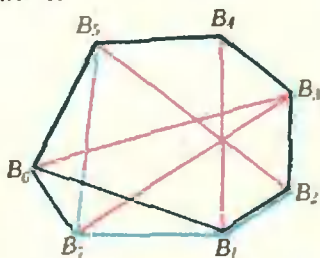


Рис. 6.

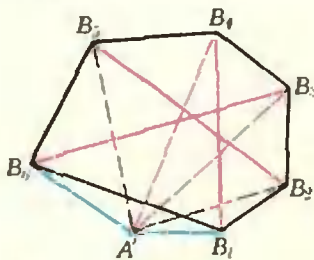


Рис. 7.

ку их пересечения. Хотя бы одна из прямых  $B_3B_6$ ,  $B_3B_7$  не проходит через точку  $P$ . Пусть, для определенности,  $P \notin [B_3B_6]$ . Это означает, что в выпуклом шестиугольнике  $B_1B_2 \dots B_6$  главные диагонали не пересекаются в одной точке. Итак, в любом выпуклом семиугольнике можно выбрать такие шесть вершин  $B_1, \dots, B_6$ , что образованный ими выпуклый шестиугольник  $B_1 \dots B_6$  будет неособым. Выберем в нашем семиугольнике такой неособый шестиугольник  $B_1 \dots B_6$ ; седьмую вершину семиугольника обозначим через  $A$  и докажем, что она обладает требуемым свойством.

Пусть  $Q_1, \dots, Q_{15}$  — точки, в которых пересекаются какие-либо две из диагоналей выбранного шестиугольника. (Их действительно пятнадцать: каждые четыре вершины шестиугольника определяют одну точку пересечения пары диагоналей и никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, так что общее число точек пересечения  $C_6^2 = 15$ . На самом-то деле важно только то, что этих точек — конечное число.) Сдвинем теперь точку  $A$  в такое положение  $A'$  (рис. 7), чтобы было  $|AA'| < \epsilon$  и в выпуклом семиугольнике  $B_1B_2 \dots B_6A'$  диагонали  $B_3A'$  и  $B_4A'$  не проходили ни через одну из точек  $Q_1, \dots, Q_{15}$  (очевидно, что это всегда можно сделать). В этом семиугольнике уже никакие три диагонали не будут пересекаться в одной внутренней точке, поскольку две добавляющиеся диагонали  $B_3A'$  и  $B_4A'$  в любом из шестиугольников, содержащих вершину  $A'$ , являясь побочными, не могут пересекаться в общей внутренней точке ни с какими двумя другими диагоналями нашего семиугольника. Таким образом, семиугольник  $B_1B_2 \dots B_6A'$  — неособый.

В заключение приведем задачу, решение которой (при  $n > 7$ ) автору неизвестно: найти наименьшее число  $k = k(n)$ , обладающее следующим свойством: в любом выпуклом  $n$ -угольнике можно так сдвинуть  $k$  вершин (на сколь угодно малые расстояния), чтобы в полученном после сдвига  $n$ -угольнике никакие три диагонали не пересекались в одной внутренней точке.

В. Болтянский

**М534.** Три прямые, параллельные сторонам треугольника  $ABC$  и проходящие через одну точку, отсекают от  $\triangle ABC$  трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольнички (рис. 8). Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольничков, прилежащих к сторонам  $\triangle ABC$ , равна площади четвертого.

Обозначим площади треугольников  $AЕК$ ,  $BDM$  и  $CFL$ , прилежащих к сторонам  $\triangle ABC$ , через  $S_1, S_2$  и  $S_3$  (рис. 8), а площадь центрального треугольничка  $DEF$ , образованного диагоналями трапеций, — через  $S_0$ . Тогда

$$S_0 = (S_{ABC} - S_{BLC} - S_{AMB} - S_{AKC}) + S_1 + S_2 + S_3.$$

Пусть  $O$  — общая точка пересечения прямых, параллельных сторонам треугольника  $ABC$ . Ясно, что

$$S_{BLC} = S_{BOC}, S_{AMB} = S_{AOM}, S_{AKC} = S_{AOC}$$

(треугольники с общими основаниями и конгруэнтными высотами). Но  $S_{BOC} + S_{AOM} + S_{AOC} = S_{ABC}$ ; поэтому выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Таким образом, мы получаем утверждение задачи:

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3.$$

Задачу М534 можно немного обобщить: не требовать,

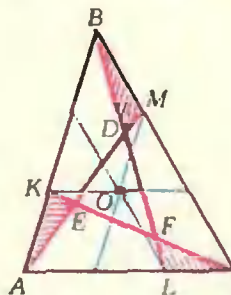


Рис. 8.

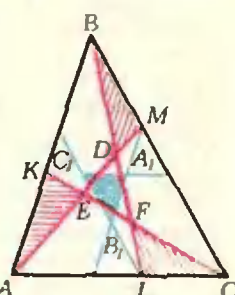


Рис. 9.



чтобы три прямые, о которых говорится в условии (параллельные сторонам треугольника  $ABC$ ), проходили через одну точку. Пусть эти прямые образуют треугольник  $A_1B_1C_1$  (рис. 9) и пусть  $k$  — коэффициент гомотетии треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  ( $|k| = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$ ). Выполнив построение, описанное в задаче М534, получим треугольники  $AЕК$ ,  $BDM$ ,  $CFL$ , прилегающие к сторонам  $\triangle ABC$ , и центральный треугольник  $DEF$ . Пусть, как и выше, их площади равны  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_0$  соответственно. Докажите самостоятельно, что

$$S_0 - kS_{ABC} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Подумайте, как можно сформулировать этот результат для случая любых гомотетичных треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

Ф. Вайнштейн



**М536.** а) Докажите, что любой прямоугольник размером  $m \times 2n$  клеток ( $m > 1$ ) можно замостить двумя слоями костяшек домино (плиток  $1 \times 2$  клетки) так, чтобы каждая плитка верхнего слоя опиралась на две разные плитки нижнего слоя.

б) Прямоугольник размером  $2k \times 2n$  клеток уже замощен одним слоем костяшек домино. Докажите, что его можно замостить вторым слоем так, чтобы выполнялось то же условие (т. е. чтобы плитки разных слоев не совпадали).

а) Разрежем прямоугольник размером  $m \times 2n$  клеток на полосы размером  $2 \times m$  клеток. Если  $m$  — нечетное, то в каждой полосе устроим наши два покрытия так, как показано на рисунке 10; если же  $m$  четное, — так, как на рисунке 11.

б) Разрежем прямоугольник размером  $2k \times 2n$  клеток на квадраты размером  $2 \times 2$  клеток. Второе покрытие в каждом таком квадрате будем строить отдельно.

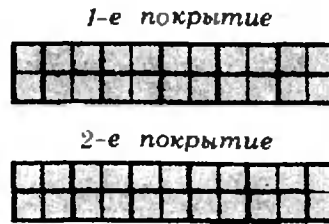


Рис. 10.

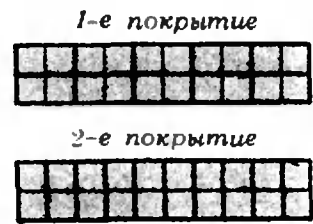


Рис. 11.

В квадрате  $2 \times 2$  возможны три случая расположения костяшек первого покрытия: обе костяшки целиком лежат в квадрате, только одна костяшка целиком лежит в квадрате, ни одна из костяшек целиком не лежит в квадрате. В третьем случае две костяшки в квадрате во втором покрытии можно расположить произвольно, а в первых двух случаях костяшки второго слоя нужно расположить перпендикулярно к костяшке (или костяшкам), целиком лежащей в квадрате в первом слое.

В. Прасолов



**М537.** Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника  $ABC$ , а также равных сторон  $AB$  и  $AC$  этого треугольника в точках  $P$ ,  $Q$  соответственно. Докажите, что середина отрезка  $PQ$  является центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

Отметим на оси симметрии треугольника  $BAC$  точки  $H \in [BC]$ ,  $K \in [PQ]$ , центр  $O$  данной окружности и точку  $T$  ее касания с окружностью, описанной вокруг треугольника  $BAC$  (рис. 12). Поскольку отрезки  $TB$  и  $OP$  оба перпендикулярны к прямой  $BA$  (угол  $TBA$  опирается на диаметр  $[AT]$ , а  $[OP]$  — радиус, идущий в точку касания), а отрезки  $BH$  и  $PK$  перпендикулярны к оси симметрии ( $AT$ ), получаем

$$\frac{|AH|}{|AT|} = \frac{|AK|}{|AO|} = \cos^2 \alpha, \quad (*)$$

где  $\alpha = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ .

Пусть  $B'$  и  $C'$  — точки пересечения сторон угла  $BAC$  с касательной, проведенной в точке  $T$ . При гомотетии с

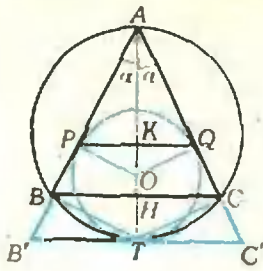


Рис. 12.

Ф537. Полировкой металлической пластины ее можно сделать зеркальной. Оценить, какова может быть максимальная высота шероховатостей, оставшихся после полировки, чтобы пластина зеркально отражала пучок света с длиной волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$  м, падающий на нее под углом  $\alpha = 45^\circ$ .

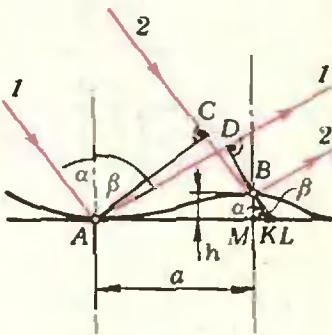


Рис. 13.

$$\begin{aligned}
 \widehat{MBL} &= \alpha, \quad \widehat{MKB} = \beta. \\
 \Delta &= |AD| - |CB| \\
 |AD| &= |AK| \sin \beta = \\
 &= (a + h \operatorname{ctg} \beta) \sin \beta = \\
 &= a \sin \beta + h \cos \beta. \\
 |CB| &= |CL| - |BL| = \\
 &= |AL| \sin \alpha - \frac{h}{\cos \alpha} = \\
 &= (a + h \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha - \\
 &= \frac{h}{\cos \alpha} = a \sin \alpha + \\
 &+ h \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} = a \sin \alpha - \\
 &- h \cos \alpha. \\
 \Delta &= a (\sin \beta - \sin \alpha) + \\
 &+ h (\cos \beta + \cos \alpha).
 \end{aligned}$$

центром  $A$  и коэффициентом  $k = \cos^2 \alpha$  треугольник  $B'AC'$  перейдет в треугольник  $BAC$  (при этом  $T$  перейдет в  $H$ ), а центр  $O$  окружности, вписанной в  $\triangle B'AC'$ , перейдет согласно (\*) в точку  $K$ . Таким образом, мы доказали, что центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , — точка  $K$ .

Н. Васильев

Для того чтобы шероховатая поверхность отражала свет зеркально, необходимо, чтобы не происходило уменьшения интенсивности отраженного света из-за интерференции волн, отраженных от разных точек поверхности. Для этого разность хода  $\Delta$  лучей, отраженных под одним и тем же углом от разных точек поверхности, должна быть много меньше длины волны.

Очевидно, наибольшую разность хода имеют лучи, отраженные от впадины и от вершины шероховатости (точки  $A$  и  $B$  на рисунке 13). Обозначим  $\alpha$  угол падения и  $\beta$  угол, под которым наблюдается отражение от поверхности. Проведя из точки  $A$  перпендикуляр  $AC$  к падающим лучам, найдем точку  $C$  на луче 2, в которой фаза волны совпадает с фазой в точке  $A$  ( $AC$  — фронт падающей волны). Проведя из точки  $B$  перпендикуляр к отраженным лучам, найдем точку  $D$ , в которой фаза отраженной волны совпадает с фазой в точке  $B$  ( $BD$  — фронт отраженной волны). Разность хода  $\Delta$  лучей 1 и 2 равна  $|AD| - |CB|$ . Проведя вычисления, найдем (см. рис. 13):

$$\Delta = a (\sin \beta - \sin \alpha) + h (\cos \beta + \cos \alpha). \quad (*)$$

Отражение будет зеркальным, если  $\Delta \ll \lambda$ . Так как расстояния  $a$  между впадинами и выступами на отражающей поверхности могут быть совершенно произвольными (как маленькими, так и большими), то для выполнения условия  $\Delta \ll \lambda$  первое слагаемое в (\*) должно быть равным нулю. Это значит, что зеркальное отражение возможно лишь в том случае, если  $\alpha = \beta$ , то есть угол падения равен углу отражения.

В этом случае  $\Delta = 2h \cos \alpha$ , и отражение будет зеркальным, если  $2h \cos \alpha \ll \lambda$ , то есть  $h \ll \frac{\lambda}{2 \cos \alpha}$ . (Примечание. Так как при  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$   $\cos \alpha \rightarrow 0$ ,

при больших углах падения (близких к  $\frac{\pi}{2}$ ) зеркальной становится и грубая поверхность с большими шероховатостями.)

При  $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$  м и  $\alpha = 45^\circ$   $h \ll 3,6 \cdot 10^{-8}$  м.

**Ф542.** Как изменится скорость истечения газа из баллона через небольшое отверстие, если температуру газа увеличить в 4 раза, а давление — в 8 раз?

Число  $Z$  молекул, вылетающих из сосуда за время  $t$ , равно

$$Z = \frac{1}{2} n S \overline{|v_x|} t,$$

где  $|v_x|$  — среднее значение модуля проекции скорости молекулы на ось  $X$ , перпендикулярную к стенке, в которой имеется отверстие,  $S$  — площадь отверстия и  $n$  — концентрация молекул газа в сосуде (число молекул в единице объема).

Величина  $\overline{|v_x|}$  пропорциональна скорости  $v$  теплового движения молекул. Так как  $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$  ( $\mu$  — молярная масса газа),  $\overline{|v_x|} \sim \sqrt{T}$ . Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории  $p = nkT$  следует, что  $n = \frac{p}{kT}$ .

Таким образом,

$$Z = \frac{p}{T} \sqrt{T} = \frac{p}{\sqrt{T}}.$$

Это означает, что при увеличении температуры в 4 раза, а давления в 8 раз скорость истечения газа увеличивается в 4 раза.



**Ф543.** На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают под углом  $45^\circ$  световые лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси полуцилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла  $n$ .

Луч, падающий на плоскую грань полуцилиндра в точке  $A$  под углом  $\alpha = 45^\circ$ , преломляется и идет далее в стекле под углом  $\beta$  (рис. 14) таким, что  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ , то есть  $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} = \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}}$ . Этот луч попадает затем на цилиндрическую поверхность в точке  $B$  под углом  $\gamma$ , который зависит от угла  $\varphi$ , образуемого радиусом  $OB$  с плоской гранью полуцилиндра:  $\gamma = \frac{\pi}{2} + \beta - \varphi$  (см. рис. 14). За-

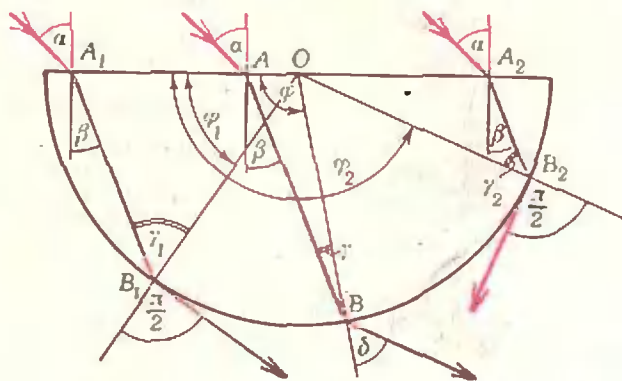


Рис. 14.

тем этот луч выходит из полуцилиндра под углом  $\delta$  таким, что  $\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{1}{n}$ , то есть  $\sin \gamma = \frac{\sin \delta}{n}$ .

Из полуцилиндра выходит те лучи, для которых  $\delta \leq \frac{\pi}{2}$  (см. рис. 14) и, следовательно,  $\sin \gamma \leq \frac{1}{n}$ . Это означает, что из стекла выходят те лучи, которые попадают на цилиндрическую поверхность между точками  $B_1$  и  $B_2$  и для кото-

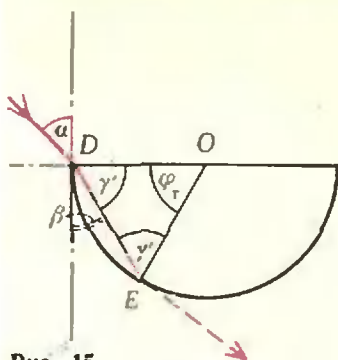


Рис. 15.

рых  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ . Поскольку

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 + \beta, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma_2 + \beta \text{ и } \gamma_1 = \gamma_2 = \arcsin \frac{1}{n},$$

окончательно находим

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}} - \arcsin \frac{1}{n} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{1}{n} + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}.$$

Верхний предел, естественно, должен быть меньше  $\pi$ . Поэтому при таких  $n$ , при которых  $\varphi_2 > \pi$ , сверху  $\varphi$  ограничено значением  $\pi$ .

При некотором значении  $n$  может оказаться, что значение  $\varphi_1$  (нижний предел  $\varphi$ ) соответствует области тени, в которую лучи вообще не попадают. Границу тени нетрудно найти, рассмотрев ход луча, падающего на полуцилиндр в точке  $D$  (рис. 15). Область тени — это, очевидно, дуга  $DE$ .

Так как треугольник  $DEO$  — равнобедренный с углами при основании  $DE$ , равными  $\gamma' = \frac{\pi - \varphi_T}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$ .

$$\varphi_T = 2\beta = 2 \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

Нижняя граница «светящейся» области равна  $\varphi_T$  при  $\varphi_T > \varphi_1$ , то есть при

$$2 \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}} - \arcsin \frac{1}{n} \Rightarrow \Rightarrow \arcsin \frac{1}{n\sqrt{2}} + \arcsin \frac{1}{n} > \frac{\pi}{2}.$$

Ф544. Оценить скорость ракеты с космонавтом при выходе из плотных слоев атмосферы.

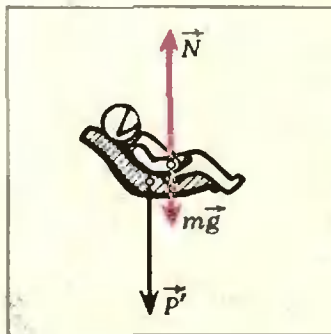


Рис. 16

Для оценки можно воспользоваться различными данными. Известно, например, что максимальная перегрузка, испытываемая космонавтом, равна 7,7—7,8.

Перегрузка — это отношение веса человека, движущегося с ускорением, к весу того же человека, когда он находится в покое на Земле. На Земле вес равен силе тяжести:  $|\vec{p}| = m|\vec{g}|$ . Если перегрузка на корабле равна  $k$ , то вес космонавта, то есть сила, с которой он действует на сиденье корабля, равен  $\vec{p}' = kmg$ . Это означает, что на космонавта со стороны сиденья действует сила  $\vec{N} = -kmg$  (рис. 16). Кроме того, на космонавта действует сила тяжести  $m\vec{g}$ . Под действием этих сил космонавт движется с ускорением

$$\vec{a} = \frac{\vec{N} + m\vec{g}}{m} = -(k-1)\vec{g}.$$

При  $k > 1$  ускорение направлено вверх. Считая, что  $k = 7,7$ , получаем  $|\vec{a}| \approx 66 \text{ м/с}^2$ . Полагая для оценки толщину плотных слоев атмосферы равной  $h = 15 \text{ км}$ , находим значение скорости ракеты при выходе из плотных слоев:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{a}|h} \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Ф545. Два воздушных пузырька радиусов  $r_1 = r_2 = 3 \text{ мм}$  в баке с водой сливаются в один. Найти радиус получившегося пузырька

Так как теплопроводность воды мала, можно считать, что процесс слияния пузырьков происходит адиабатно и, следовательно, изменение  $\Delta U$  внутренней энергии системы равно работе  $A$  внешних сил давления. Если внешнее давление равно  $p_0$ , а изменение объема пузырьков —  $\Delta V$ ,

ки сразу же после его образования и через большое время после этого, если теплопроводность воды невелика, а ее теплоемкость очень большая. Считать, что пузырьки находятся вблизи поверхности воды.

то  $A = p_0 \Delta V$ .

Изменение внутренней энергии системы равно  $\Delta U = -\sigma \Delta s + \Delta u$ . Здесь  $\sigma \Delta s$  — изменение поверхностной энергии за счет изменения площади поверхности пузырьков на  $\Delta s$  ( $\sigma$  — поверхностное натяжение воды);  $\Delta u$  — изменение внутренней энергии воздуха.

Внутренняя энергия воздуха в результате слияния пузырьков изменилась на величину

$$\Delta u = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T,$$

где  $m$  — масса воздуха в пузырьках,  $\Delta T$  — изменение температуры воздуха. (Воздух состоит в основном, из двухатомных молекул азота и кислорода, поэтому его можно считать двухатомным газом. Внутренняя энергия одного моля двухатомного газа равна  $\frac{5}{2} RT$ .)

Давление  $p$  воздуха в пузырьках в нашем случае остается практически постоянным. Действительно, давление  $p$  отличается от давления в воде на уровне пузырьков на величину  $\frac{2\sigma}{r}$  ( $r = r_1 = r_2$ ) — в первоначальном

пузырьке и на величину  $\frac{2\sigma}{\rho}$  — в новом пузырь-

ке радиуса  $\rho$  ( $\rho > r$ ). Поскольку слияние происходит у поверхности воды, можно считать, что давление в воде равно атмосферному, то есть равно

$$p_0 \approx 10^5 \text{ Н/м}^2. \text{ Так как } \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 49 \text{ (Н/м}^2) \ll p_0,$$

можно считать, что давление в пузырьках остается неизменным и равным  $p_0$ . Поэтому, согласно уравнению

$$\text{газового состояния, } p_0 \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T, \text{ откуда } \Delta T = p_0 \Delta V \frac{\mu}{mR}.$$

Таким образом,

$$A = p_0 \Delta V = \sigma \Delta s + \frac{5}{2} p_0 \Delta V, \text{ или } \sigma \Delta s = -\frac{3}{2} p_0 \Delta V.$$

Подставляя в это выражение  $\Delta V = \frac{4}{3} \pi (\rho^3 - 2r^3)$  и  $\Delta s = 4\pi (\rho^2 - 2r^2)$ , получим:

$$p_0 \rho^3 + 2\sigma \rho^2 - 2p_0 r^3 - 4\sigma r^2 = 0,$$

или, с учетом численных данных,

$$10^5 \rho^3 + 14,6 \cdot 10^{-2} \rho^2 = 5,4 \cdot 10^{-3}.$$

Поскольку заведомо  $\rho > 3 \cdot 10^{-3}$  м, второе слагаемое в левой части равенства мало по сравнению с первым и им можно пренебречь. Поэтому

$$\rho \approx \sqrt[3]{5,4 \cdot 10^{-8}} \approx 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ (м)},$$

то есть  $\rho \approx 3,8$  мм.

*И. Слободецкий*

М. Балк, Ю. Ломакин

## Доказательство неравенств с помощью производной

В этой статье, основанной на материалах занятий с учениками IX—X классов в летнем лагере школьников «Математик-79» (Вологодская область), показано, как простые сведения о производных могут быть использованы для проверки истинности неравенств.

Для доказательств неравенств особенно полезна следующая теорема («Алгебра и начала анализа 9», п. 54):

**Теорема 1.** Если функция  $f$  имеет положительную производную в каждой точке интервала  $|a; b|$ , то эта функция возрастает на  $|a; b|$ . Если функция  $f$  имеет отрицательную производную в каждой точке интервала  $|a; b|$ , то  $f$  убывает на  $|a; b|$ . Если дополнительно известно, что  $f$  непрерывна в каждой точке полуинтервала  $|a; b|$ , то возрастание (или, соответственно, убывание) имеет место на всем этом полуинтервале\*).

Начнем с двух примеров на применение этой теоремы: первый — простой, второй — посложнее.

**Пример 1.** Докажите, что при  $x > 1$

$$x^2 - 1 > 2 \ln x.$$

Сохраняется ли то же неравенство при  $0 < x < 1$ ?

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$ .

Имеем

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1) > 0$$

при  $x > 1$ .

Поэтому  $f$  возрастает на  $|1; +\infty|$ . Если мы учтем еще, что функция  $f$  непрерывна на  $|1; +\infty|$  (т. е. в каждой точке этого промежутка), то возрастание  $f$  имеет место на  $|1; +\infty|$ . Поэтому при  $1 < x < +\infty$  будет  $f(x) > f(1)$ , т. е.  $x^2 - 1 - 2 \ln x > 0$ ,  $x^2 - 1 > 2 \ln x$ .

Рассуждая аналогично, можно убедиться, что  $f'(x) < 0$  на  $|0; 1|$ , так что  $f$  убывает на  $|0; 1|$ . Так как  $f$  непрерывна на  $|0; 1|$ , убывание имеет место на  $|0; 1|$ . Поэтому при  $0 < x < 1$  имеем  $f(x) > f(1)$ , т. е.  $x^2 - 1 - 2 \ln x > 0$ . Итак,  $x^2 - 1 > 2 \ln x$  при  $0 < x < 1$ .

**Пример 2.** Выясните, что больше:  $79^{3/5} + 1900^{3/5}$  или  $1979^{3/5}$ ?

**Решение.** Решим более общую задачу: что больше  $a^p + b^p$  или  $(a + b)^p$ , если  $0 < a < b$  и  $0 < p < 1$ ? Рассмотрим на  $|0; +\infty|$  функцию  $f(x) = (a + x)^p - (a^p + x^p)$ .

Имеем:

$$f'(x) = p(a + x)^{p-1} - px^{p-1} = p \left[ \left( \frac{1}{a + x} \right)^{1-p} - \left( \frac{1}{x} \right)^{1-p} \right] < 0$$

при  $0 < x < +\infty$ . Значит,  $f$  на  $|0; +\infty|$  убывает. Поэтому из  $0 < a < b$  следует, что  $f(b) < f(a)$ , т. е.  $(a + b)^p - (a^p + b^p) < (a + a)^p - (a^p + a^p) = a^p(2^p - 2) < 0$ ,  $a^p + b^p > (a + b)^p$ . В частности,  $79^{3/5} + 1900^{3/5} > 1979^{3/5}$ .

Для решения дальнейших примеров нам потребуется такое следствие из теоремы 1:

**Теорема 2.** Пусть каждая из функций  $f$  и  $g$  непрерывна в каждой точке полуинтервала  $|a; b|$  и имеет производную в каждой точке интервала  $|a; b|$ . Для того чтобы всюду на интервале  $|a; b|$  было верно неравенство

$$f(x) < g(x), \quad (1)$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:

$$1. f'(x) < g'(x) \quad \text{всюду на } |a; b|, \quad (2)$$

\* Аналогичное утверждение остается верным, если вместо полуинтервала  $|a; b|$  брать полуинтервал  $|a; b|$  или отрезок  $|a; b|$ .

$$\text{II. } f(a) \leq g(a). \quad (3)$$

Доказательство. Функция  $F(x) = g(x) - f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , причем  $F(a) \geq 0$  и  $F'(x) > 0$  на  $]a; b[$ . По теореме 1 функция  $F$  возрастает на  $]a; b[$ , так что при  $a < x < b$  имеем  $F(x) > F(a) \geq 0$ , т. е.  $f(x) < g(x)$  всюду на  $]a; b[$  \*).

Применение теоремы 2 мы тоже проиллюстрируем на двух примерах.

Пример 3. Докажите, что при  $x > 0$

$$\ln(1+x) < x. \quad (4)$$

Решение. Дифференцируя (4), получим

$$\frac{1}{1+x} < 1.$$

что, очевидно, верно на  $]0; +\infty[$ . Кроме того,  $\ln(1+0) = 0$ . Следовательно, согласно теореме 2 неравенство (4) верно при  $0 < x < +\infty$ .

Пример 4. Проверьте, справедливо ли при  $x_1 > x_2 > 0$  неравенство

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln \frac{x_1}{x_2}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \quad (5)$$

Решение. Мы можем перейти от неравенства с двумя переменными к неравенству с одним переменным, если положим  $x = \frac{x_1}{x_2}$ . Тогда (5) принимает вид

$$\frac{x-1}{\ln x} < \frac{1}{2}(x+1). \quad (6)$$

Из  $x_1 > x_2 > 0$  вытекает  $x > 1$ . Дифференцировать дробь, у которой  $\ln x$  в знаменателе, неудобно. Перепишем поэтому неравенство (6) в такой равносильной форме:

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2} \ln x. \quad (7)$$

\*) Если дополнительно потребовать еще непрерывность функций  $f$  и  $g$  в точке  $b$ , то (как ясно из доказательства) неравенство (1) будет верно в точке  $b$ . Можно доказать, что теорема 2 остается верной и в том случае, когда строгое неравенство (2) нарушается (заменяется равенством  $f'(x) = g'(x)$ ) в конечном числе точек (или даже в бесконечном числе точек, если только такие точки не заполняют какой-либо промежуток вида  $]a; c[$ , где  $a < c \leq b$ ).

Чтобы решить, верно ли это неравенство, выясним, верно ли неравенство, которое возникает при его почленном дифференцировании. Таким образом, мы должны рассмотреть неравенство

$$\frac{2}{(x+1)^2} < \frac{1}{2x} \quad (8)$$

или равносильное ему неравенство  $(x-1)^2 > 0$ .

Последнее при  $x > 1$  верно и, следовательно, при этих  $x$  верно (8). Далее, при  $x = 1$  обе части неравенства (7) принимают равные (нулевые) значения. Видим, что условия теоремы 2 соблюдены, так что неравенство (7) верно, а вместе с ним верны (6) и (5).

Иногда при доказательстве неравенства полезно применить почленное дифференцирование не один, а несколько раз. Точнее говоря, иногда полезно воспользоваться следующим следствием из теоремы 2 \*):

Теорема 3. Пусть каждая из функций  $f$  и  $g$  непрерывна на полуинтервале  $]a; b[$  и имеет в каждой точке интервала  $]a; b[$  производную порядка  $n$ . Для того чтобы всюду было верно неравенство

$$f(x) < g(x) \text{ на } ]a; b[, \quad (9)$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись такие условия:

I. Выполняется неравенство, получающееся из неравенства [9] путем  $n$ -кратного дифференцирования, т. е. всюду на  $]a; b[$

$$f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x); \quad (10)$$

$$\text{II. } f(a) \leq g(a),$$

$$f'(a) \leq g'(a), \dots$$

$$\dots, f^{(n-2)}(a) \leq g^{(n-2)}(a);$$

$$f^{(n-1)}(a) \leq g^{(n-1)}(a).$$

Доказательство. Так как  $|f^{(n-1)}(x)|' < |g^{(n-1)}(x)|'$  на  $]a; b[$  (см. (10)) и  $f^{(n-1)}(a) \leq g^{(n-1)}(a)$ , согласно теореме 2:  $f^{(n-1)}(x) < g^{(n-1)}(x)$  всюду на  $]a; b[$ . Но это значит, что  $|f^{(n-2)}(x)|' < |g^{(n-2)}(x)|'$  всюду на  $]a; b[$ . Кроме того, по условию,  $f^{(n-2)}(a) \leq g^{(n-2)}(a)$ . Поэтому по тео-

\*) Производная от производной функции  $f$  называется ее второй производной и обозначается через  $f''$ ; аналогично определяется третья, четвертая производные и вообще производная любого порядка  $n$  (обозначение:  $f^{(n)}$ ).

реме 2:  $f^{(n-2)}(x) < g^{(n-2)}(x)$  всюду на  $|a; b|$ . Повторяя аналогичные рассуждения, мы после конечного числа шагов получим, что всюду на  $|a; b|$  справедливы строгие неравенства  $f^{(n-3)}(x) < g^{(n-3)}(x)$ , ...,  $f'(x) < g'(x)$ ,  $f(x) < g(x)$  и, наконец,  $f(x) < g(x)$ , что и требуется доказать.

**Пример 5.** Докажите, что при  $x \neq 0$  справедливо неравенство  $e^x + e^{-x} > 2 + x^2$ . (11)

**Решение.** Рассмотрим сначала случай  $x > 0$ . Будем дифференцировать (11) почленно несколько раз и посмотрим, не получим ли неравенство, справедливость которого не вызывает сомнения. Получаем последовательно:

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &> 2x; \\ e^x + e^{-x} &> 2; \\ e^x - e^{-x} &> 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство при  $x > 0$ , очевидно, верно. Кроме того, при  $x = 0$  верны равенства  $e^0 + e^{-0} = 2 + 0^2$ ,  $e^0 - e^{-0} = 2 \cdot 0$ ,  $e^0 + e^{-0} = 2$ . В силу теоремы 3 неравенство (11) верно при  $x > 0$ . Так как при замене  $x$  на  $-x$  обе части неравенства (11) не изменятся, то это неравенство верно и для всех  $x < 0$ .

## Упражнения

Проверьте справедливость следующих неравенств:

- $e^x > 1 + x$  при  $x \neq 0$ ;
- $(p+q)^6 < 32(p^6 + q^6)$  при  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $p \neq q$ ;
- $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$  при  $x > 0$ ;
- $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$  при  $x > 1$ ;
- $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;
- $\sin x < \frac{1}{2}x(\pi - x)$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;
- $2ab \ln \frac{b}{a} < b^2 - a^2$  при  $0 < a < b$ ;
- $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$  при  $x > 0$ ;
- $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  при  $x > 0$ .

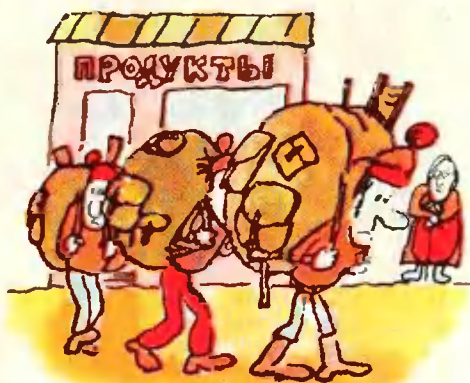
10. В окружность радиуса  $R$  вписан правильный  $n$ -угольник с периметром  $p_n$  и около нее описан правильный  $n$ -угольник с периметром  $P_n$ . Докажите следующее неравенство (принадлежащее известному физику и математику Христиану Гюйгенсу):  $2p_n + P_n > 6\pi R$ .

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Окончание. Начало см. на с. 7, 14, 25)  
 (Каунас) 38; Г. Ирисов (Донецк) 40; А. Капралов (Тбилиси) 38—41; В. Кельман (Москва) 38, 40; Е. Коган (Днепропетровск) 38; А. Кожевников (Днепропетровск) 34; Г. Коломийцев (Сумгаит) 36; В. Комов (Александров) 33—41, 43—46; К. Кондратьев (Москва) 38, 40, 45, 47; Ю. Кордюков (Серов) 38; И. Коротков (Волгоград) 43, 47; А. Костерев (Семилуки) 38—41; О. Кравец (Воронеж) 40, 41, 46; А. Крейнес (Кольчугино) 35; А. Крупцов (Курск) 33; А. Куприн (Москва) 38—41; В. Курьян (Ростов-на-Дону) 34, 38—41, 44; А. Кучер (Донецк) 35; А. Кушнеров (Москва) 38, 44; А. Лазарян (Лобня Московской обл.) 35, 37; В. Лашкин (Киев) 35—40; А. Лебедев (Горький) 40; С. Логунов (Москва) 40, 47; Д. Людмирский (Киев) 33, 34, 36, 37, 47; С. Магарян (Кострома) 38; С. Маламанов (Ленинград) 35, 38; А. Масленников (п. Н-Таръял Мар АССР) 46; А. Минаев (Саратов) 38; А. Могилянер (Свердловск) 35, 38, 40, 41, 44, 46, 47; М. Морозов (Ашхабад) 40; И. Муромцев (Москва) 33, 36, 38—41; Д. Надеждин (Курган) 38—41; В. Наталич (Ашхабад) 38, 47; А. Оглоблин (Иркутск) 38, 41; И. Омелян (Львов) 35, 37—44, 46, 47; О. Оразмамедов (р/ц Кызыл-Атрек ТССР)

40, 41; А. Орлов (п. Черноголовка Московской обл.) 38, 40, 46, 47; Т. Павелкина (Киев) 38; С. Пахарук (Бобруйск) 36; А. Перов (Москва) 35, 37—43, 47; И. Пинск (Гродно) 36; В. Попов (Москва) 41; С. Прядкин (Киев) 34—38, 41, 43, 46, 47; С. Пушкарев (Курск) 34, 40; В. Rogozin (Щелково Московской обл.) 35; И. Романовский (Лида) 36—44, 46, 47; И. Рузин (Ленинград) 38, 41, 47; И. Савенков (р. п. Лысье Горы Саратовской обл.) 38; А. Саломатин (Москва) 34, 36; С. Сафронюк (Ровно) 35, 36, 38, 40, 43, 46, 47; В. Сачков (Чебоксары) 33, 38—41; П. Сильвестров (Новосибирск) 38—47; В. Симонов (Оренбург) 38, 40; А. Сромин (Ленинград) 35, 38; А. Степанович (Никольский Карагадинской обл.) 37; А. Стыркас (п. Черноголовка Московской обл.) 46; С. Суров (Оренбург) 36; С. Трохов (Оренбург) 38—41; Т. Ульмасов (Душанбе) 33—36; Л. Уткин (Вологда) 46; И. Федин (Омск) 34—40, 43; С. Хосид (Алма-Ата) 38, 46; В. Шараян (Ереван) 35, 38, 40; В. Швейдель (Великие Луки) 35; А. Шершнее (Краснодар) 38—41; А. Ширяев (с. Рождествоно Морд АССР) 35, 38; С. Шичанин (Невинномыск) 35, 36, 38—41, 44, 47; В. Шмидт (Москва) 38; М. Эфроимский (Ленинград) 33—40, 44, 46, 47; Г. Яковенко (Кисловодск) 35; М. Яковлев (Кемерово) 37, 40; В. Яровой (Ленинград) 38—47.

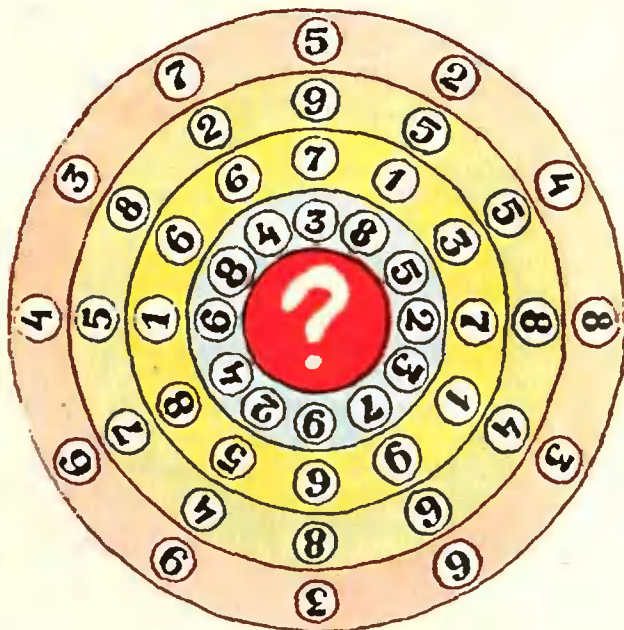




## Задачи

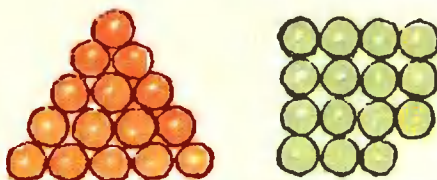
1. Туристы купили в магазине сто предметов: спички (цена 1 копейка за коробку), пирожки (по 10 копеек) и консервы (цена — 50 копеек за банку). За все уплатили 5 рублей. Сколько предметов каждого товара куплено?

2. Попробуйте повернуть четыре кольца, изображенные на рисунке, так, чтобы сумма любых четырех чисел, расположенных на одном радиусе, равнялась одному и тому же числу. Какое это число?



3. 15 шариков можно сложить в виде треугольника, но нельзя сложить в виде квадрата — одного шарика не хватает (см. рисунок). Из какого количества шариков, не превосходящего 50, можно сложить как треугольник, так и квадрат?

4. Можно ли в квадрат со стороной длины 1 поместить несколько непересекающихся кругов, сумма радиусов которых равнялась бы 1979?



5. В ряд расположено пять монет. Средняя лежит вверх орлом, остальные — решкой. За один ход разрешается перевернуть любые три рядом лежащие монеты. Можно ли добиться, чтобы все монеты лежали вверх орлом? А если вверх орлом первоначально лежит только первая монета? А если только вторая?





А. Дозоров

## Можно ли носить воду в решете?

*Один раз мы взяли с собой керосинку, но больше — никогда! Целую неделю мы как будто жили в керосиновой лавке. Керосин просачивался всюду. Я никогда не видел, чтобы что-нибудь просачивалось, как керосин. Мы держали его на носу лодки, и оттуда он просочился до самого руля, пропитав лодку и все ее содержимое. Он растекался по всей реке, заполнил собой пейзаж и отравил воздух.*

*Джером К. Джером. «Трое в одной лодке, не считая собаки».*

Вы помните историю про муравьишку, который очень торопился домой? Многие помогали ему. Например, через речку его перевез водомер. Это — насекомое, и вы, наверное, много раз видели его. Водомер совершенно спокойно стоит на воде и не тонет (рис. 1). Правда, если внимательно приглядеться, вода под ним немного прогибается.

Почему же это насекомое не тонет? И разве может вода прогибаться?

Оказывается, все дело в поверхностном слое жидкости. Он обла-

дает целым рядом необычных свойств. Вы легко можете убедиться в этом, проделав несколько довольно простых опытов.

1. Налейте в тарелку немного воды. Возьмите иголку, лучше потоньше, и аккуратно положите ее на поверхность воды — иголка не тонет (рис. 2). Если опыт у вас не получился, не отчаивайтесь. Потрите иголку пальцами (или слегка смажьте ее маслом, или, еще лучше, потрите о свечку) и повторите опыт снова.

Посмотрите внимательно вдоль поверхности воды. Видите, что около иголки поверхность изогнута? Вне-



Рис. 1.

чатление такое, как будто иголка лежит на пленке.

Это сравнение довольно хорошее. Поверхностный слой жидкости, и вправду, чем-то похож на растянутую упругую пленку (хотя происхождение особых свойств поверхностного слоя совсем иное, чем у растянутой пленки). Попробуем это пояснить.

В глубине жидкости каждая молекула со всех сторон окружена соседями, которые тянут ее во все стороны одинаково. Молекулы же поверхностного слоя сверху соседей не имеют, поэтому они испытывают притяжение со стороны нижележащих молекул. Жидкость как бы стремится к тому, чтобы на ее поверхности было минимальное количество молекул. В результате поверхностный слой жидкости находится как бы в натянутом состоянии подобно упругой пленке. Иногда мы будем поверхность жидкости называть пленкой, но слово это будем заключать в кавычки.

Итак, не только водомер, но и более плотные тела, в нашем опыте — металлическая иголка, держатся на поверхности жидкости, причем они именно не «плавают» в обычном понимании этого слова, а удерживаются поверхностным натяжением жидкости.

Правда, если вы будете брать все более и более толстые иголки, то, начиная с некоторого момента, сила



Рис. 2:

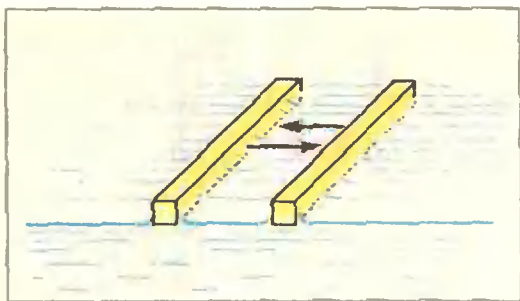


Рис. 3.

тяжести превысит силы поверхностного натяжения, и иголки будут тонуть. (Интересно, что длина иголки практически никакой роли не играет.)

2. Оказывается, натяжение поверхностной «пленки» зависит от выбранной жидкости.

Положите иголку на поверхность воды. Возьмите спичку, отрежьте у нее головку (в основном — чтобы не перепачкаться), потрите кончик спички о мыло и коснитесь им воды сбоку от иголки, на расстоянии примерно 1 см от нее. Иголка немедленно отскочит от спички. Происходит это потому, что молекулы мыльного раствора слабее, чем молекулы чистой воды, притягивают к себе иголку. С разных сторон на иголку действуют разные силы, она движется в сторону действия большей силы. Принято говорить, что поверхностное натяжение чистой воды больше, чем мыльной.

Вы можете погонять иголку таким образом по всей тарелке. Обязательно подгоните ее к краю тарелки и повторите опыт. Как теперь ведет себя иголка?

Учтите, что мыло очень быстро распространяется по поверхности воды, так что почаще меняйте воду в тарелке.

Вместо иголки можно на поверхность воды положить спичку и проводить опыты с ней. (Иголка, то и дело тонущая от неосторожных движений, сильно усложняет эксперименты.)

Возьмите две спички и аккуратно положите их на воду параллельно друг другу. Спички будут сближаться (рис. 3). Снова раздвиньте их и кончиком третьей спички, предваритель-

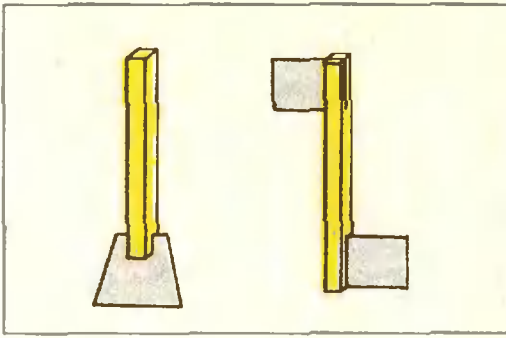


Рис. 4.

Рис. 5.

но потерев им о мыло, дотроньтесь до воды с разных сторон от плавающих спичек. Что с ними будет происходить?

По такому же принципу можно сделать несколько нехитрых игрушек и показать их действие малышам.

Расщепите немного конец спички и вставьте туда кусочек бумаги (рис. 4). В мыльнице приготовьте из мыла кашницу и аккуратно обмокните в нее торец бумажки. Осторожно положите спичку на воду — спичка поплывет. Вы заметили, в какую сторону плывет спичка?

Теперь в оба конца спички вставьте кусочки бумаги так, как показано на рисунке 5, и обмокните их в мыльную кашницу. Положите спичку на поверхность воды — спичка начнет вращаться.

На рисунке 6 показана модель пушки, которую вы можете вырезать из плотной бумаги. Чтобы эта пушка «выстрелила», достаточно мыльным концом спички коснуться поверхности воды в точке А.

Попробуйте вместо мыла брать другие вещества. Как-то в пионерском

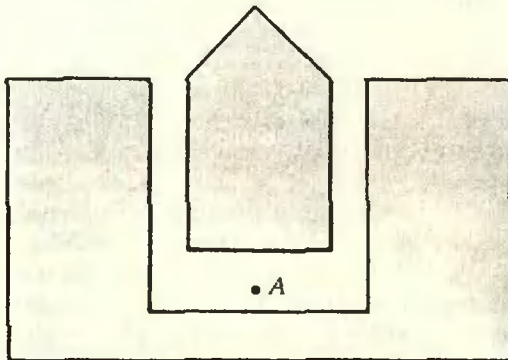


Рис. 6.

лагере можно было наблюдать такую картину. Группа ребят обступила небольшую лужу. У них в руках были маленькие щепки. Концы щепок ребята мазали еловой смолой и устраивали гонки — щепочки быстро и замысловато скользили по воде.

3. Поверхностное натяжение способно поднимать жидкость на сравнительно большую высоту.

Возьмите стеклянную трубочку с очень маленьким внутренним диаметром ( $d \ll 1$  мм), так называемый капилляр. Опустите один из концов капилляра в сосуд с водой — вода поднимется выше уровня воды в сосуде. Чем тоньше капилляр, тем выше поднимается вода по его стенкам. Если у вас когда-нибудь брали кровь из пальца, вы это уже видели — медсестра в капилляр собирает капельку крови.

Капиллярные явления можно наблюдать повсюду. Это поднятие воды по мельчайшим отверстиям в куске сахара, поднятие керосина по фитилю в керосиновой лампе, всасывание влаги из почвы корнями различных растений и т. п.

Более скромный опыт можно проделать и с не очень тонкой трубочкой. Наберите в нее воду и пальцем закройте нижний конец трубки (рис. 7). Вы увидите, что уровень воды в трубке изогнут. Это результат того, что молекулы воды сильнее притягиваются к молекулам стенок сосуда, чем друг к другу. В таком случае говорят, что жидкость смачивает твердое тело.

Сделайте еще один опыт. Вылив чай, оставьте на дне чашки немного

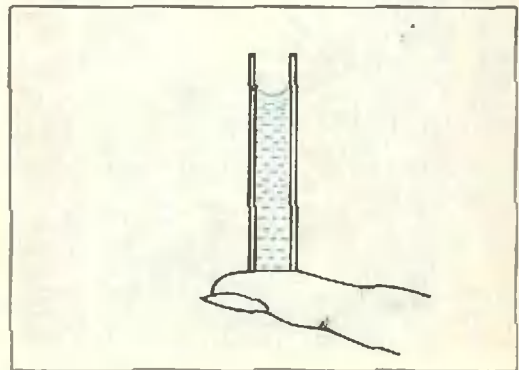


Рис. 7.

жидкости с чайниками. Чайной ложкой или спичкой осторожно коснитесь поверхности жидкости. Она тотчас же «поползет» вверх, увлекая за собой чайники.

4. Не все жидкости и не во всяких трубках «цепляются» за стенки. Бывает и так, что жидкость в капилляре опускается ниже уровня в широком сосуде, при этом ее поверхность — выпуклая. Про такую жидкость говорят, что она *не смачивает* поверхность твердого тела. Притяжение молекул жидкости друг к другу сильнее, чем к молекулам стенок сосуда. Так ведет себя, например, ртуть в стеклянном капилляре (рис. 8).

Наберите в пипетку немного воды. Осторожно капните одну капельку на чистое стекло, а вторую — на хлеб, намазанный сливочным маслом. Первая капелька растечется по стеклу, а вторая (на сливочном масле) — нет. Вывод — вода смачивает стекло, но не смачивает масло.

Как вы ответите на известный вопрос: можно ли носить воду в решете? Возьмите решето, смажьте его маслом или лучше натрите свечкой. Влейте в решето немного воды — она не вытекает! Оказывается, воду держит поверхностная «пленка», образовавшаяся из-за несмачивания водой ячеек решета. Если у вас нет решета, вместо него можно взять, например, терку или консервную банку, в которой тонким гвоздиком пробиты маленькие дырочки.

Вы уже видели, что несмачивающая жидкость не растекается по поверхности, а собирается в каплю, причем чем меньше жидкости, тем

форма капли ближе к сферической. Почему? Благодаря сильному притяжению молекул жидкости друг к другу жидкость принимает форму с наименьшей поверхностью. А это, как правило, сферическая поверхность.

Последнее очень наглядно демонстрируется в состоянии невесомости. Если космонавт выпустит воду из сосуда (в невесомости нельзя сказать «выльет» в том смысле, как это понимается на Земле), она примет форму шара. Кратковременное пребывание расплавленного металла в состоянии невесомости во время падения с большой высоты издавна используется для производства дроби. Капли жидкого металла, падая, приобретают форму шарика и, остывая, сохраняют ее. Так получают дробинки.

Аналогичный опыт вы можете провести и в домашних условиях. Покапайте стеарин с горящей свечки в таз с холодной водой — вы получите маленькие «дробинки». Свечку лучше держать как можно ближе к воде, тогда стеарин будет остывать именно на поверхности воды.

5. Поверхностное натяжение иногда оказывает столь сильное действие, что его можно ощутить (в буквальном смысле этого слова) руками.

Возьмите две одинаковые стеклянные пластинки. Протрите их хорошенько и приложите друг к другу. Они легко разъединяются. Теперь одну из пластинок смочите водой и сложите пластинки. Разъединить их очень трудно (если только не перемещать пластинки параллельно друг другу). Это результат действия поверхностного натяжения.

Итак, на простых опытах вы познакомились с особенностями поверхностного слоя жидкости. Подобных экспериментов можно провести очень много. Но имейте в виду, что всегда больше всего нравится тот опыт, который вы придумали сами.

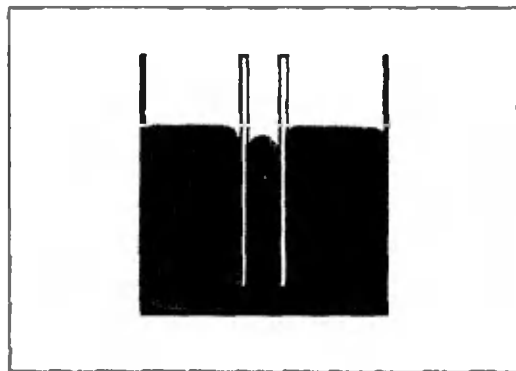


Рис. 8.



С. Овчинников

## Если промежуток не замкнут...

При решении геометрических задач на отыскание наибольшего (или наименьшего) значения иногда забывают, что искомые величины обычно удовлетворяют определенным ограничениям, обусловленным их геометрическим смыслом. Во многих таких задачах исследование рассматриваемой функции на границах ее области определения представляет собой существенную часть решения.

Ниже приводятся примеры такого исследования.

**Задача 1.** Найти наибольшее значение величины периметра прямоугольника, вписанного в данный круговой сегмент так, что две его вершины лежат на хорде данного сегмента.

**Решение.** Пусть  $2a$  — длина хорды сегмента, а  $h$  — его высота (рис. 1). Легко видеть, что величина радиуса круга есть  $R = \frac{a^2 + h^2}{2h}$ .

Обозначив через  $x$  половину длины основания вписанного прямоугольни-

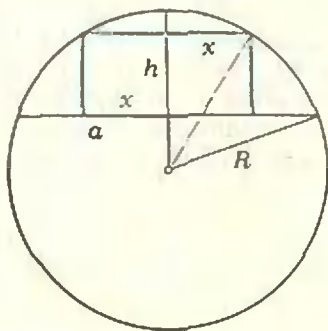


Рис. 1.

ка, находим длину второй стороны:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} - R + h.$$

Отсюда находим величину периметра  $P$  прямоугольника как функцию переменной  $x$ :

$$P(x) = 4x + 2\sqrt{R^2 - x^2} - 2R + 2h.$$

При этом  $x \in ]0; a[$ , если  $h \leq R$ , и  $x \in ]0; a[$ , если  $h > R$  (проверьте!).

Найдем критические точки функции  $P$  и исследуем их. Имеем

$$P'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Отсюда

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} = x.$$

Решая последнее уравнение, находим критическую точку  $x_0 = \frac{2\sqrt{5}}{5} R$ .

Функция  $\frac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$  является возрастающей. Поэтому производная  $P'(x)$  положительна при  $x < x_0$  и отрицательна при  $x > x_0$ . Таким образом, точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $P$ . Осталось исследовать вопрос, когда эта точка дает наибольшее значение периметра и что происходит, когда наибольшее значение в этой точке не достигается. В этом исследовании существенную роль играет интервал, на котором определена функция  $P$ . Напомним, что для  $h \leq R$  это есть интервал  $]0; a[$ , а для  $h > R$  — полуоткрытый промежуток  $]0; a[$ . И в том, и в другом случае, если критическая точка  $x_0$  принадлежит интервалу  $]0; a[$ , то функция  $P$  принимает в ней свое наибольшее значение. Имеем

$$\begin{aligned} x_0 \in ]0; a[ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} R < a \Leftrightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{a^2 + h^2}{h} < a. \end{aligned}$$

Решая последнее неравенство, находим  $\frac{h}{a} \in \left] \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right[$ .

Для всех таких значений  $a$  и  $h$  наибольшее значение периметра равно

$$P(x_0) = \frac{(\sqrt{5}-1)a^2 + (\sqrt{5}+1)h^2}{h}.$$

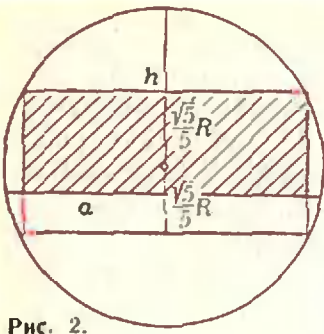


Рис. 2.

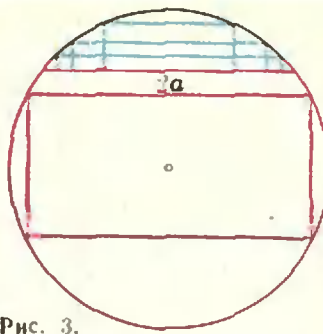


Рис. 3.

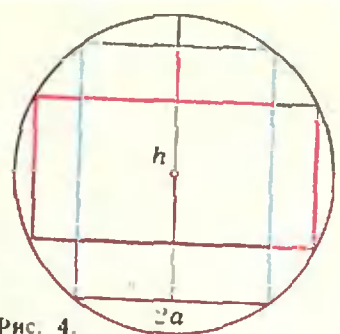


Рис. 4.

Пусть теперь критическая точка  $x_0$  не принадлежит интервалу  $]0; a[$ , т. е.  $x_0 \geq a$ . В этом случае производная  $P'(x)$  положительна для всех  $x$  из  $]0; a[$  и функция  $P$  возрастает на интервале  $]0; a[$ .

Пусть  $h \leq R$ . Совместно с условием  $x_0 \geq a$  это дает нам  $\frac{h}{a} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Так как при  $h \leq R$  функция  $P$  определена на интервале  $]0; a[$ , мы делаем вывод, что она не достигает своего наибольшего значения.

Если же  $h > R$ , то совместно с условием  $x_0 \geq a$  получаем

$\frac{h}{a} \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Так как в этом случае функция  $P$  определена на полуоткрытом промежутке  $]0; a[$ , она достигает своего наибольшего значения при  $x = a$ . Это значение есть  $P(a) = 4a + 2 \cdot \frac{h^2 - a^2}{h}$ .

Дадим наглядную геометрическую иллюстрацию полученным результатам. Выделим в круге радиуса  $R$  две параллельные «критические» хорды, находящиеся на расстоянии  $\frac{\sqrt{5}}{5} R$  от центра круга (рис. 2), и построим их до прямоугольника. Мы будем рассматривать лишь «верхние» сегменты с хордами, параллельными выделенным.

Если хорда данного сегмента находится между выделенными хордами, то  $a > \frac{2\sqrt{5}}{5} R$  и вписанный в наш сегмент прямоугольник наибольшего периметра есть пересечение данного сегмента с прямоугольником, построен-

ным на выделенных хордах (см. рис. 2).

Если хорда данного сегмента находится выше обеих выделенных хорд, то  $h < R$  и  $a \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} R$ ; в этом случае периметры вписанных прямоугольников не достигают наибольшего значения (рис. 3).

Наконец, если хорда данного сегмента находится ниже обеих выделенных хорд, то  $h > R$  и  $a \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} R$ ; в этом случае вписанный прямоугольник наибольшего периметра имеет своим основанием эту хорду (рис. 4).



Рис. 5.

**Задача 2.** Из прямоугольника с отрезанным «уголком» (рис. 5) требуется вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными сторонам данного прямоугольника.

**Решение.** Введем систему координат, как это показано на рисунке 6, и продолжим линию «среза» до пересечения с осями координат. Пусть

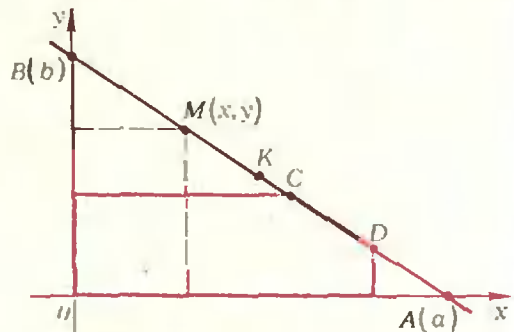


Рис. 6.

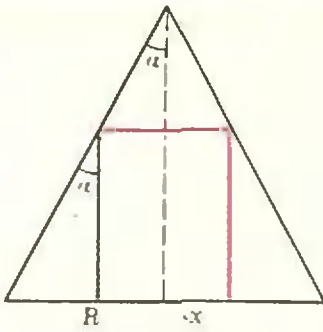


Рис. 7.

точки пересечения ее с осями координат есть  $A(a, 0)$  и  $B(0, b)$ . Решим сначала следующую вспомогательную задачу: *вписать в треугольник  $AOB$  прямоугольник наибольшей площади, одна из вершин которого есть  $O$* . Пусть величина основания прямоугольника есть  $x$ . Тогда его высота равна  $b - \frac{b}{a}x$ . Отсюда площадь прямоугольника, рассматриваемая как функция от  $x$ , есть

$$S(x) = x \left( b - \frac{b}{a}x \right).$$

Очевидно,  $S(x)$  принимает наибольшее значение при  $x_0 = \frac{a}{2}$ . При этом функция  $S$  возрастает на полуоткрытом промежутке  $\left] 0; \frac{a}{2} \right]$  и убывает на полуоткрытом промежутке  $\left[ \frac{a}{2}; a \right]$ .

Проведенное исследование функции  $S$  позволяет дать следующее наглядное решение исходной задачи. Если середина  $K$  отрезка  $[AB]$  принадлежит «срезу»  $[CD]$ , то ее следует принять за вершину искомого прямоугольника. Если точка  $K$  находится «выше» среза  $[CD]$ , то за вершину искомого прямоугольника следует принять точку  $C$ . Если же она находится «ниже» среза  $[CD]$ , то за вершину искомого прямоугольника принимает точка  $D$ .

**Задача 3.** *В конус с углом  $2\alpha$  при вершине осевого сечения и величиной радиуса основания  $R$  вписать цилиндр с наибольшей площадью полной поверхности.*

**Решение.** На рисунке 7 изображено осевое сечение данного конуса. Обозначая через  $x$  величину

радиуса основания вписанного цилиндра, легко находим, что его высота равна  $(R-x) \operatorname{ctg} \alpha$ . Отсюда полная поверхность, как функция переменной  $x$ , есть

$$S(x) = 2\pi \cdot \operatorname{ctg} \alpha [( \operatorname{tg} \alpha - 1)x^2 + Rx].$$

Эта функция условиями задачи определена на интервале  $]0; R[$ . При  $\operatorname{tg} \alpha \neq 1$  легко находим критическую точку  $x_0 = \frac{R}{2(1 - \operatorname{tg} \alpha)}$  функции  $S$ .

В зависимости от расположения критической точки относительно интервала  $]0; R[$  возможны три случая:

$$1) x_0 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha > 1.$$

В этом случае, очевидно, функция  $S$  является возрастающей на интервале  $]0; R[$ . Своего наибольшего значения функция  $S$  в этом случае не достигает.

$$2) x_0 \in ]0; R[ \Leftrightarrow 0 < \frac{R}{2(1 - \operatorname{tg} \alpha)} < R \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}.$$

В этом случае критическая точка  $x_0$  является, очевидно, точкой максимума функции  $S$ , причем на промежутке  $]0; x_0[$  функция  $S$  возрастает, на промежутке  $]x_0; R[$  убывает; следовательно, наибольшее значение этой функции есть  $S(x_0) = \frac{\pi R^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{2(1 - \operatorname{tg} \alpha)}$ .

$$3) x_0 \geq R \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \operatorname{tg} \alpha < 1.$$

В этом случае функция  $S$  опять является возрастающей на интервале  $]0; R[$  и наибольшего значения не достигает.

Наконец, при  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  функция  $S$  является возрастающей на интервале  $]0; R[$ .

Подводя итог исследованию функции  $S$ , можно сказать, что для  $\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}$  в конус можно вписать цилиндр

с наибольшей площадью полной поверхности. Если же  $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2}$ , то

множество значений функции  $S$  есть открытый промежуток  $]0; 2\pi R^2[$  («Алгебра и начала анализа 10», п. 84) и функция  $S$  наибольшего значения не достигает.

**Задача 4.** *Один из углов треугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ , равен  $\alpha$ . Найти наиболь-*



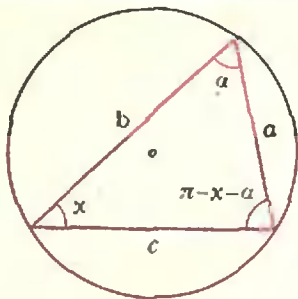


Рис. 8.

шее значение длины высоты треугольника.

**Решение.** Обозначим длины сторон треугольника через  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 8) и пусть угол, лежащий против стороны  $a$ , равен  $x$ .

Очевидно,  $x \in ]0; \pi - \alpha[$ . Заметим, что в условии не указано, о какой из трех высот треугольника идет речь. Поэтому при решении «в лоб» необходимо найти наибольшее значение длины каждой высоты, а затем уже из найденных значений определить наибольшее.

Обозначив длины высот треугольника, опущенных на стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$ , соответственно, через  $h_a$ ,  $h_b$  и  $h_c$ , вычислим их как функции угла  $x$ . Используя теорему синусов и формулу для площади треугольника, находим

$$h_a(x) = \frac{bc}{a} \sin x = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin(x + \alpha),$$

$$h_b(x) = \frac{ac}{b} \sin(x + \alpha) = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin x,$$

$$h_c(x) = \frac{ab}{c} \sin \alpha = 2R \cdot \sin x \cdot \sin(x + \alpha).$$

Рассмотрим функцию  $h_a$  при  $x \in ]0; \pi - \alpha[$ . Очевидно, при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  эта функция достигает наибольшего значения  $2R \sin \alpha$  при  $x_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Если же  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , то функция  $h_a$  убывает на интервале  $]0; \pi - \alpha[$  и наибольшего значения не имеет. Аналогично находим, что функция  $h_b$  для  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  достигает наибольшего значения  $2R \sin \alpha$  при  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ , а для

$\alpha \geq \frac{\pi}{2}$  наибольшего значения не имеет.

Рассмотрим, наконец, функцию  $h_c$ .

$$h_c(x) = 2R [\cos x \cdot \sin(x + \alpha) + \sin x \cdot \cos(x + \alpha)] = 2R \cdot \sin(2x + \alpha).$$

Очевидно, на интервале  $]0; \pi - \alpha[$

$$h_c(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 0 \Leftrightarrow 2x + \alpha = \pi.$$

Критическая точка есть  $x_2 = \frac{\pi - \alpha}{2}$ .

На этот раз  $\alpha \in ]0; \pi - \alpha[$  при любом допустимом  $\alpha$ . На интервале  $]0; \pi - \alpha[$  слева от точки  $x_2$  производная положительна, а справа — отрицательна. Поэтому в точке  $x_2$  функция  $h_c$  достигает своего наибольшего

значения, равного  $2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .

Итак, нам осталось для каждого значения угла  $\alpha$  найти наибольшее значение из найденных наибольших значений высот.

Рассмотрим сначала случай  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ .

При таких  $\alpha$  наибольшие значения высот достигаются и принимают два значения:  $2R \sin \alpha$  и  $2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . Преобразуем разность

$$\begin{aligned} 2R \sin \alpha - 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \\ &= 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left( 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод:

а) при  $\alpha < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$  максимальная высота равна  $2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ;

б) при  $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  максимальная высота равна  $2R \sin \alpha$ .

Пусть теперь  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ . Выше мы отметили, что наибольшее значение высоты  $h_c$  равно  $2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . Легко

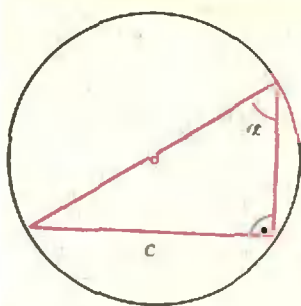


Рис. 9.

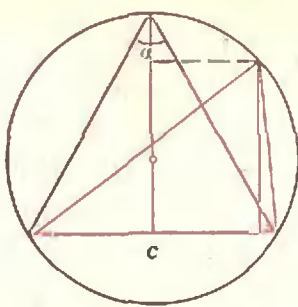


Рис. 10.

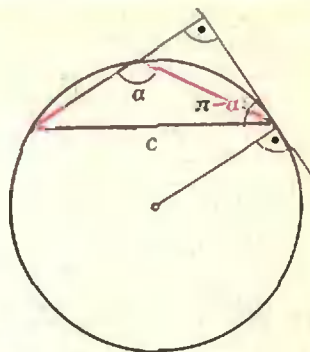


Рис. 11.

видеть, что значения функций  $h_a$  и  $h_b$  заполняют интервал  $]0; 2R \sin^2 \alpha[$ . В рассматриваемом случае  $2R \sin^2 \alpha >$

$> 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . Значит, при  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$  наибольшее значение высоты не достигается.

Эту задачу можно решить изящнее, если привлечь геометрические соображения. Очевидно,  $h_a \leq c$  и

$h_b \leq c$ . Поэтому при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  наиболь-

шие значения  $h_a$  и  $h_b$  равны  $c$  (рис. 9). Значит, в этом случае нам нужно выбрать большее из чисел  $h_c$  и  $c$ . При фиксированном  $\alpha$  фиксировано также и  $c = 2R \sin \alpha$ . Наибольшее значение  $h_c$  имеет, очевидно, в равнобедренном треугольнике (рис. 10). Таким образом, в рассматриваемом случае нам, как и выше, нужно выбрать большее из чисел  $2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  и

$2R \sin \alpha$ . Если же  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , то  $h_a \geq h_c$

и  $h_b \geq h_c$ , причем  $h_a$  и  $h_b$  не достигают наибольшего значения, равного  $c \sin(\pi - \alpha) = 2R \sin^2 \alpha$  (рис. 11).

Внимательный читатель, конечно, заметил, что во всех разобранных задачах мы не следовали правилу из п. 59 пособия «Алгебра и начала анализа 9». По существу, это правило применимо лишь к случаю замкнутого промежутка. Если же промежуток открытый или полуоткрытый, как это и было почти во всех наших задачах, поведение функции на этом промежутке требует специального анализа!

Такая же проблема возникает в случае бесконечных промежутков.

#### Упражнения

1. В параболический сегмент, хорда которого перпендикулярна к оси симметрии параболы (рис. 12), вписать прямоугольник наибольшего периметра. (Длина хорды —  $2a$ , высота —  $h$ .)



Рис. 12.

2. В треугольник с основанием  $a$  и высотой  $h$  вписать прямоугольник наибольшего периметра, две вершины которого лежат на основании треугольника.

3. Найти наибольшую хорду эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , проходящую через  $B(0; -b)$ .

4. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от точки, лежащей на диаметре полуокруга, до точек полуокружности, ограничивающей его. Тот же вопрос для кругового сегмента.

5 (ДГУ, биофак, 1978). Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \sin 2x - x$  на  $[0; \pi]$ .

6 (ЛГУ, ф-т прикладной математики — процессов управления, 1977). Для каких значений параметра  $p$  наименьшее на промежутке  $[0; 1]$  значение кубического трехчлена  $x^3 - 2px^2 + 1$  достигается на правом конце промежутка?

7 (ХГУ, физфак, 1978). Найти наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{x} + \frac{q^2}{6-x}$  на отрезке  $[2; 3]$  в зависимости от параметра  $q$ .

Л. Асламазов

# Закон сохранения импульса. Реактивная сила

Одна из возможных формулировок второго закона Ньютона утверждает, что изменение импульса (количества движения) механической системы равно импульсу внешних сил:

$$\Delta \vec{P} = \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t, \quad (1)$$

где  $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$  — полный импульс системы,  $\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum \vec{F}_{i\text{внеш}}$  — векторная сумма внешних сил, действующих на систему.

Для замкнутой (изолированной) системы  $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$  и, следовательно,

$$\vec{P} = \text{const} \quad (2)$$

— суммарный импульс системы есть величина постоянная. Это — закон сохранения импульса. Он позволяет найти конечные скорости взаимодействующих тел, образующих изолированную систему, не вдаваясь в детали взаимодействия.

Следует помнить, что уравнение (2) — векторное, и ответ может существенно зависеть от направления начальных скоростей тел.

**Задача 1.** По гладкой горизонтальной поверхности движется тележка массой  $M$  со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 1). В нее стреляют из ружья, причем пуля массой  $m$ , летящая со скоростью  $\vec{V}$ , застревает в тележке. Какой станет скорость тележки после попадания в нее пули в случае:

а) когда скорость пули направлена горизонтально, так же как скорость тележки, б) когда скорость пули направлена вертикально вниз?

Воспользуемся законом сохранения импульса в проекции на направление первоначального движения тележки.

В случае а) получим:

$$mV + Mv = (m + M) v_{\text{к}},$$

откуда конечная скорость тележки

$$v_{\text{к}} = \frac{mV + Mv}{m + M}.$$

Как видно, после попадания пули скорость тележки увеличилась.

В случае б) начальный импульс пули не дает проекции на горизонтальное направление, следовательно,

$$Mv = (m + M) v_{\text{к}}.$$

Отсюда

$$v_{\text{к}} = \frac{Mv}{m + M}$$

— конечная скорость тележки уменьшилась.

Векторный характер закона сохранения импульса в ряде случаев приводит к неожиданным результатам.

**Задача 2.** Две одинаковые лодки, в которых находятся два одинаковых спортсмена, движутся по инерции (почти без трения) с одинаковыми скоростями параллельно друг другу по поверхности озера (рис. 2). Начинает идти дождь. Спортсмен, сидящий в первой лодке, вычерпывает воду из

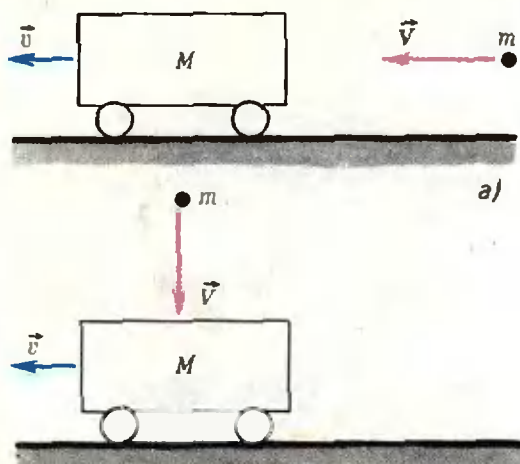


Рис. 1.

б)

лодки и выливает ее в сторону, а спортсмен во второй лодке спит. Какая из лодок быстрее пройдет одно и то же расстояние? В направлении, перпендикулярном к киллю, лодки движаться не могут.

Как следует из решения задачи 1, при попадании в лодку воды массой  $m$ , начальная скорость которой направлена вертикально (дождь!), скорость лодки уменьшается и становится равной по модулю

$$v_k = \frac{M}{M+m} v,$$

где  $M$  — масса лодки,  $v$  — модуль ее начальной скорости. Отсюда видно, что изменение скорости лодки

$$\Delta v = v - v_k = \frac{v}{1 + M/m}$$

тем меньше, чем больше отношение  $M/m$ . Поскольку масса дождя, попавшего в лодку, одна и та же, уменьшение скорости будет большим у той лодки, из которой спортсмен вычерпывает воду. Заметим также, что при выбросе воды в сторону скорость лодки не меняется, так как киль не дает ей двигаться в перпендикулярном направлении.

Таким образом, вторая лодка, в которой спортсмен спит, быстрее пройдет заданное расстояние и первой окажется у финиша.

Если система не замкнута, изменение ее импульса всегда связано с действием внешних сил.

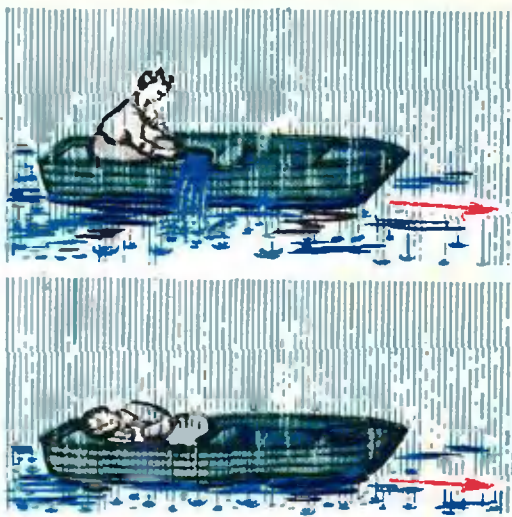


Рис. 2.

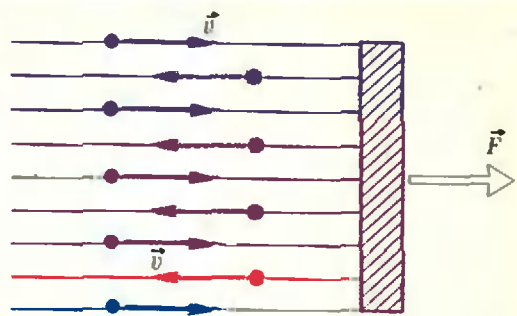


Рис. 3.

**Задача 3. Пучок частиц,** имеющих скорость  $\vec{v}$  и массу  $m$ , падает на пластину площадью  $S$ ; при этом он частично поглощается, а частично упруго отражается (рис. 3). Какая сила действует на пластину, если концентрация частиц в пучке равна  $n$ , а доля поглощенных частиц  $\alpha$ ? Рассмотреть также случай, когда пластина сама движется со скоростью  $\vec{u}$ : а) навстречу пучку, б) в том же направлении, что и налетающие частицы.

Вначале рассмотрим случай неподвижной пластины. Каждая частица, поглощаемая пластиной, передает ей импульс  $m\vec{v}$ . За время  $\Delta t$  до пластины долетают те частицы, которые находятся в объеме  $V = vS \Delta t$  ( $v$  — модуль скорости частиц), то есть

$$N = nvS \Delta t \text{ частиц.}$$

Из них поглощается

$$N_{\text{погл}} = \alpha N = \alpha nvS \Delta t \text{ частиц,}$$

и, следовательно, пластине передается импульс

$$\vec{P}_{\text{погл}} = N_{\text{погл}} \cdot m\vec{v} = \alpha nvS \Delta t m\vec{v}.$$

В соответствии с формулой (1)

на пластину действует сила  $\vec{F}_1$ , модуль которой равен

$$F_1 = |\vec{P}_{\text{погл}}| / \Delta t = \alpha nSmv^2.$$

При упругом отражении частицы модуль ее скорости, а значит, и модуль импульса частицы не меняются, однако направление вектора импульса меняется на противоположное. Поэтому изменение импульса частицы

$$\Delta \vec{P} = m\vec{v} - (-m\vec{v}) = 2m\vec{v}.$$

Число частиц, отраженных от пла-

стины за время  $\Delta t$ , равно

$$N_{\text{отр}} = (1 - \alpha) N = (1 - \alpha) n v S \Delta t.$$

Следовательно, при отражении частиц пластине передается импульс

$$\vec{P}_{\text{отр}} = N_{\text{отр}} \cdot 2 \vec{m} \vec{v} =$$

$$= 2(1 - \alpha) n v S \Delta t m \vec{v},$$

что приводит к появлению силы  $\vec{F}_2$ , действующей на пластину. Ее модуль

$$F_2 = |\vec{P}_{\text{отр}}| / \Delta t = 2(1 - \alpha) n S m v^2.$$

Полная сила, действующая на пластину, равна по модулю

$$F = F_1 + F_2 = (2 - \alpha) n S m v^2. \quad (3)$$

Для того чтобы найти силу, действующую на движущуюся пластину, перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью  $u$ . В этой системе скорость частиц увеличивается при движении пластины навстречу пучку:  $v_1 = v + u$  и уменьшается при движении пластины в обратном направлении:  $v_2 = v - u$  (здесь  $v$ ,  $u$ ,  $v_1$  и  $v_2$  — модули соответствующих скоростей). В остальном все остается таким же, как в случае неподвижной пластины. Следовательно, сила, действующая на пластину, находится по формуле (3), в которой следует  $v$  заменить на  $v_1$  или  $v_2$ :

$$F_a = (2 - \alpha) n S m (v + u)^2,$$

$$F_b = (2 - \alpha) n S m (v - u)^2.$$

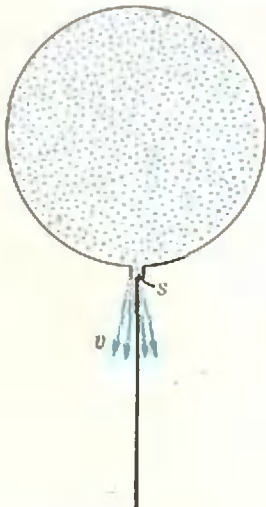


Рис. 4.

В первом случае сила возрастает, во втором — уменьшается.

Особый интерес представляет случай возникновения так называемой реактивной силы  $\vec{F}_p$ , когда из системы с некоторой скоростью  $\vec{u}$  выбрасывается часть  $\Delta m$  ее массы. В соответствии с формулой (2)

$$\vec{F}_p = - \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{u}.$$

Величину  $\mu = \Delta m / \Delta t$ , равную массе вещества, выбрасываемого за единицу времени, называют обычно расходом вещества.

**Задача 4.** В воздушном шарике, удерживаемом нитью, в том месте, где крепится нить, появилось отверстие сечением  $s$  (рис. 4). Как изменилось натяжение нити, если скорость истечения газа из шарика равна  $v$ ? Плотность газа  $\rho$ .

Изменение  $\Delta T$  натяжения нити равно по модулю реактивной силе, возникающей при вытекании газа из шарика (изменением выталкивающей силы и веса шарика в начальный момент, пока изменение объема шарика мало, можно пренебречь). За время  $\Delta t$  вытекает объем газа  $V = s v \Delta t$ , его масса  $m = \rho s v \Delta t$ . Следовательно, расход газа  $\mu = m / \Delta t = \rho s v$  и реактивная сила

$$F_p = \Delta T = \rho s v^2.$$

**Задача 5.** Закрепленный воздушный вентилятор потребляет мощность  $N$ , его КПД равен  $\eta$ . Какая реактивная сила действует на вентилятор во время его работы? Диаметр лопастей вентилятора  $D$ , плотность воздуха  $\rho$ .

Обозначим через  $v$  модуль скорости воздушного потока, создаваемого вентилятором. Тогда масса воздуха, приводимого в движение за время  $\Delta t$ , равна  $m = \rho v S \Delta t$ , где  $S = \pi D^2 / 4$  — площадь сечения воздушного потока (рис. 5), а его кинетическая энергия —

$$E_{\text{кин}} = \frac{m v^2}{2} = \frac{\rho v^3 S \Delta t}{2}.$$

Следовательно, мощность вентилятора

$$N = \frac{E_{\text{кин}}}{\eta \Delta t} = \frac{\rho v^3 S}{2\eta}.$$

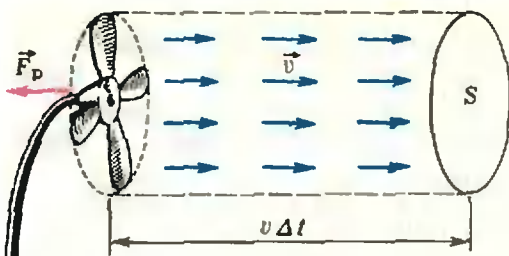


Рис. 5.

Отсюда можно найти скорость потока воздуха:

$$v = \left( \frac{2\eta N}{\rho S} \right)^{1/3}$$

и реактивную силу, действующую на вентилятор:

$$F_p = \rho S v^2 = (\rho S)^{1/3} (2\eta N)^{2/3} = (\pi \rho)^{1/3} (\eta D N)^{2/3}.$$

Если механическая система движется с постоянной скоростью, так что изменение ее импульса происходит только вследствие выброса массы, для нахождения реактивной силы удобнее перейти в систему отсчета, связанную с движущимся телом.

**Задача 6.** На горизонтальной поверхности стоит сосуд с водой, закрытый легким подвижным поршнем, на котором лежит тяжелый груз массой  $M$  (рис. 6). У дна сосуда имеется отверстие сечением  $s$ , через которое вытекает вода. Какова установившаяся скорость движения сосуда, если сила трения между сосудом и поверхностью пропорциональна скорости сосуда, причем коэффициент пропорциональности равен  $k$ . Площадь сечения сосуда  $S$ .

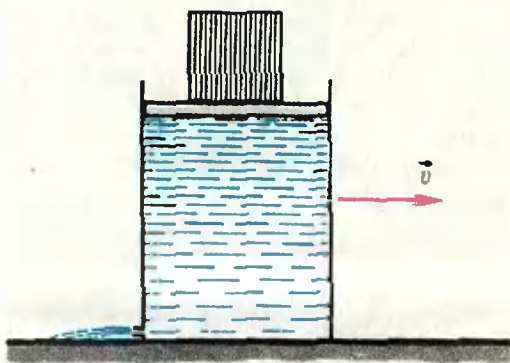


Рис. 6.

Искомая скорость (точнее, ее модуль  $v$ ) определяется из условия равенства модулей силы трения и реактивной силы, действующей на сосуд:

$$F_{тр} = kv = F_p.$$

Чтобы найти реактивную силу, перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v$ . В этой системе сосуд неподвижен. Для определения модуля  $u$  скорости истечения воды воспользуемся законом сохранения энергии.

При вытекании небольшого количества воды массой  $\Delta m$  изменение кинетической энергии воды  $\Delta m u^2 / 2$  равно изменению потенциальной энергии воды  $\Delta m g h$  ( $h$  — высота уровня воды в сосуде) и груза  $M g \Delta h$  ( $\Delta h$  — перемещение груза, равное изменению уровня воды):

$$\frac{\Delta m u^2}{2} = \Delta m g h + M g \Delta h.$$

Изменение уровня воды в сосуде  $\Delta h$  выражается через массу  $\Delta m$  вытекающей воды:  $\Delta h = \Delta m / \rho S$ . Подставляя это выражение в закон сохранения энергии и сокращая на  $\Delta m$ , для скорости  $u$  истечения воды получим

$$u = \sqrt{2gh + 2Mg/\rho S}.$$

Если груз достаточно тяжелый (то есть его масса много больше массы воды в сосуде:  $M \gg \rho S h$ ), первым слагаемым под корнем можно пренебречь. В таком случае скорость истечения воды практически постоянна и равна

$$u = \sqrt{2Mg/\rho S}.$$

Теперь можно найти реактивную силу, действующую на сосуд:

$$F_p = u \frac{\Delta m}{\Delta t} = u \frac{\rho s u \Delta t}{\Delta t} = \rho s u^2 = \frac{2Mgs}{S},$$

и скорость движения сосуда:

$$v = \frac{F_p}{k} = \frac{2Mgs}{kS}.$$

**Задача 7.** Из ракеты массой  $M$ , движущейся со скоростью  $v$ , выбрасывается порция топлива  $m$  со скоростью  $u$  относительно ракеты. Какой станет скорость ракеты? Какую скорость будет иметь ракета после выброса двух таких порций, трех порций  $k$  порций (рис. 7)?

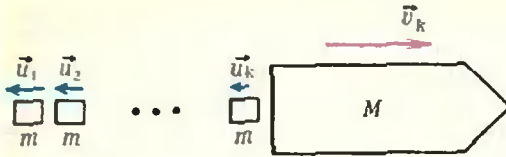


Рис. 7.

Вспользуемся законом сохранения импульса. Удобнее написать его в системе отсчета, движущейся с первоначальной скоростью ракеты  $\vec{v}$  (так как скорость выброса топлива  $u$  задана относительно ракеты). В проекции на направление движения ракеты получим

$$0 = (M - m) v_{1p} - mu,$$

откуда скорость ракеты

$$v_{1p} = \frac{mu}{M - m}.$$

В неподвижной системе отсчета скорость ракеты после выброса первой порции топлива равна по модулю

$$v_1 = v + v_{1p} = v + \frac{mu}{M - m}.$$

Выброс второй порции топлива будем рассматривать в системе, движущейся со скоростью  $\vec{v}_1$  (на рисунке 7 выброс топлива показан в неподвижной системе отсчета). Из закона сохранения импульса имеем

$$v_{2p} = \frac{mu}{M - 2m},$$

а в неподвижной системе

$$v_2 = v_1 + v_{2p} = v + v_{1p} + v_{2p} = v + \frac{mu}{M - m} + \frac{mu}{M - 2m}.$$

Легко видеть, что после  $k$  выбросов скорость ракеты будет равна

$$v_k = v + \frac{mu}{M - m} + \frac{mu}{M - 2m} + \dots + \frac{mu}{M - km} = v + \sum_{l=1}^k \frac{mu}{M - lm}.$$

Для сравнения найдем также скорость ракеты  $\vec{v}_k$  при однократном выбросе топлива массой  $km$  с той же скоростью  $u$  относительно ракеты. Для этого опять воспользуемся законом сохранения импульса, только запишем его сразу относительно не-

подвижной системы отсчета:

$$Mv = (M - km) v_k' + km(v - u),$$

откуда

$$v_k' = v + \frac{kmu}{M - km}.$$

Легко видеть, что  $v_k' > v_k$ . Такой результат связан с предположением, что скорость выброса топлива из ракеты в неподвижной системе отсчета постоянна и равна  $v - u$ . В действительности по мере ускорения ракеты скорость выброса топлива уменьшается (постоянна скорость выброса относительно ракеты). Поэтому первая формула для  $v_k$  более точно описывает реальную ситуацию.

У п р а ж н е н и я

1. Нейтрон массой  $m_0$  поглощается ядром неподвижного атома массой  $m$ . Известно, что энергия возбужденного атома может отличаться от энергии основного состояния только на определенное значение  $E_0$ . С какой скоростью двигался нейтрон?

2. Ракета, запущенная вертикально вверх, взрывается в высшей точке своего подъема. При взрыве образуются три осколка равной массы. Один осколок падает в месте старта ракеты. Два других падают на Землю в один и тот же момент. Показать, что эти осколки приземляются на одном и том же расстоянии от места старта ракеты.

3. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально со скоростью  $\vec{v}$ ? Масса змеи  $M$ , ее длина  $L$ .

4. Лестница, на которой находится человек, уравновешена противовесом на веревке, перекинутой через блок. Масса человека равна массе лестницы, а масса блока и трение пренебрежимо малы. Человек, находящийся вначале на высоте  $h$  от пола, поднимается по лестнице на  $l$  ступенек. На какой высоте от пола он окажется после этого, если расстояние между ступеньками равно  $l$ ?

5. На конце соломинки, лежащей на гладком столе, сидит кузнечик. С какой наименьшей скоростью он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Трение между столом и соломинкой отсутствует. Масса соломинки  $M$ , ее длина  $l$ . Масса кузнечика  $m$ .

6. Скорость истечения газов из сопла ракеты равна 300 м/с относительно ракеты. Может ли такой двигатель разогнать ракету до скорости 600 м/с?

7. При испытании реактивного снаряда, установленного в хвосте самолета для защиты его от нападения сзади, был обнаружен удивительный факт: при пуске снаряд разворачивался и догонял самолет. Как можно объяснить это явление?



# Заочная школа программирования

## Урок 3: Работа с памятью. Имена и их значения.

### Процедуры

При составлении программ на большинстве языков программирования, в том числе на Рублике, память вычислительной машины или робота удобно представлять себе как набор отдельных блоков (рис. 1), в каждом из которых можно хранить отдельную программу (или ее часть), число, строку текста (вспомните задание 2.4 из предыдущего урока — «Квант», 1979, № 9, с. 57) или что-нибудь еще. *Имя блока памяти* (для краткости его называют просто *имя*, при описании некоторых языков в этом же смысле употребляют другое слово: *идентификатор*) можно описать следующей синтаксической диаграммой:

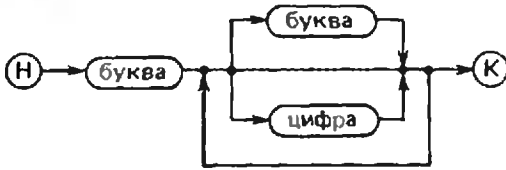


Рис. 1

Расшифруем эту диаграмму:

Имя начинается с буквы, за которой следует произвольное количество букв и цифр, стоящих в произвольном порядке. Множество значений переменного поля Цифра описано в уроке 2; для поля Буква мы дадим словесное определение: значением этого поля может быть любая буква русского или латинского алфавита.

Примеры имен:

A15, КРОКОДИЛ, СКОРОСТЬ, В, L1, Q06П7, АЛЬФА

Несколько примеров типичных ошибок при попытке написать имена: 6A12B (начинается не с буквы), АВ-1 (дефис «-» — это не буква и не цифра).

ИМЯ БЛОКА (это не одно имя, а два) 'A5' (апостроф — это не буква).

Если в блоке памяти с именем А размещено, например, число 15, то говорят, что имени А *присвоено значение 15*.

Читать значение какого-либо имени можно сколько угодно раз, но если мы присвоили этому имени новое значение, то старое теряется безвозвратно. В языке Рублик существует несколько предписаний, позволяющих присваивать именам значения. Самое простое из них — *предписание присваивания*. Синтаксическая диаграмма для этого предписания изображена в сводной таблице на с. 56 этого номера журнала. В переменном поле «выражение» может стоять либо число, либо текст, либо имя, как указано в той же сводной таблице.

Рассмотрим несколько примеров предписания присваивания:  
**ЗНАЧЕНИЕ 5 ПРИСВОИТЬ ИМЕНИ А;**



ЗНАЧЕНИЕ СТРОКА ПРИСВОИТЬ  
 ИМЕНИ А;  
 ЗНАЧЕНИЕ 9.81 ПРИСВОИТЬ  
 ИМЕНИ УСКОРЕНИЕ;  
 А ПРИСВОИТЬ ИМЕНИ А5;  
 А ПРИСВОИТЬ А5;  
 ЗНАЧЕНИЕ А ПРИСВОИТЬ А5;

Проверьте, что все эти примеры охватываются диаграммой!

Сокращенная запись, использованная в трех последних примерах, удобнее и компактнее, чем полная, но первое время мы рекомендовали бы пользоваться полной записью, чтобы запомнить смысл предписания.

Если в качестве значения переменного поля «выражение» в левой части предписания присваивания, т. е. левее слова ПРИСВОИТЬ, стоит число или текст, то именно это число или этот текст будут присвоены имени, указанному справа. Если же в качестве выражения используется имя, то присваиваться будет значение этого имени.

Попробуем проследить, как изменится содержимое блоков памяти при последовательном выполнении перечисленных выше предписаний. Для этого нам целесообразно нарисовать таблицу значений имен. После выполнения первого присваивания эта таблица будет выглядеть так:

ИМЯ	значение
А	5

Иначе говоря, имя А имеет в этот момент значение 5. После второго присваивания имя А получит новое значение. Старое при этом будет безвозвратно потеряно. В таблице мы изобразим это так:

ИМЯ	значение
А	5 'СТРОКА'

Такие таблицы удобнее всего рисовать мелом на доске, стирать старые значения и вписывать новые. Выражения «стереть из памяти» и «записать в память» весьма наглядно передают суть происходящего.

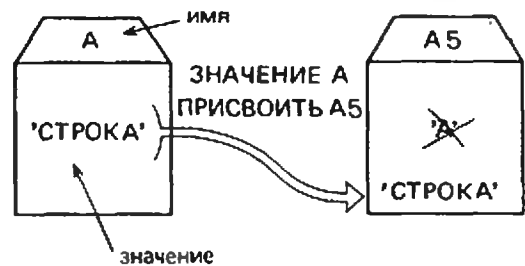
После выполнения следующих трех предписаний таблица станет такой:

ИМЯ	значение
А	5 'СТРОКА'
ускорение	9.81
А5	5 'А'

Проследим теперь за выполнением последнего предписания:

ЗНАЧЕНИЕ А ПРИСВОИТЬ А5;

В левой части предписания стоит имя, значит, нам нужно использовать его значение



Это значение будет присвоено имени А5 вместо старого текста 'А'.

После этого присваивания таблица приобретает такой вид:

ИМЯ	значение
А	5 'СТРОКА'
ускорение	9.81
А5	5 <del>5</del> 'СТРОКА'

Точно так же «работает» значение поля «выражение» в предписании ОТПЕЧАТАТЬ, синтаксическая диаграмма которого приведена в сводной таблице: если в качестве выражения стоит имя, то будет отпечатано значение этого имени. (Напомним, что имя, в отличие от текста, не может начинаться с апострофа.) Например, выполняя предписание ОТПЕЧАТАТЬ 5, А, А, А, 'А', '', 'А5', '-', А5, 'ВСЕ', на терминале появится строка:

5СТРОКАСТРОКАСТРОКАА А5-  
СТРОКАВСЕ

Обратите внимание, что текст печатается без апострофов!

Задание 3.1. Найдите, что отпечатает ЭВМ по программе:

5 ПРИСВОИТЬ А;  
'А' ПРИСВОИТЬ В;  
А ПРИСВОИТЬ С;  
ОТПЕЧАТАТЬ 'В = ', В, 'С = ', С;  
\* \* \*

Теперь настало время разобраться, как можно было бы запомнить в памяти ЭВМ программу или ее часть, чтобы не набирать каждый раз все предписания заново.

Программа или часть программы, которая имеет имя, называется *процедурой*; процедуры предназначены для хранения в памяти ЭВМ.

Чтобы ЭВМ запомнила процедуру (поместила ее в память), нужно:

1. Набрать предписание **ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ** и указать имя этой процедуры.

2. Перечислить все предписания, входящие в состав процедуры, указывая перед каждым из них порядковый номер (натуральное число).

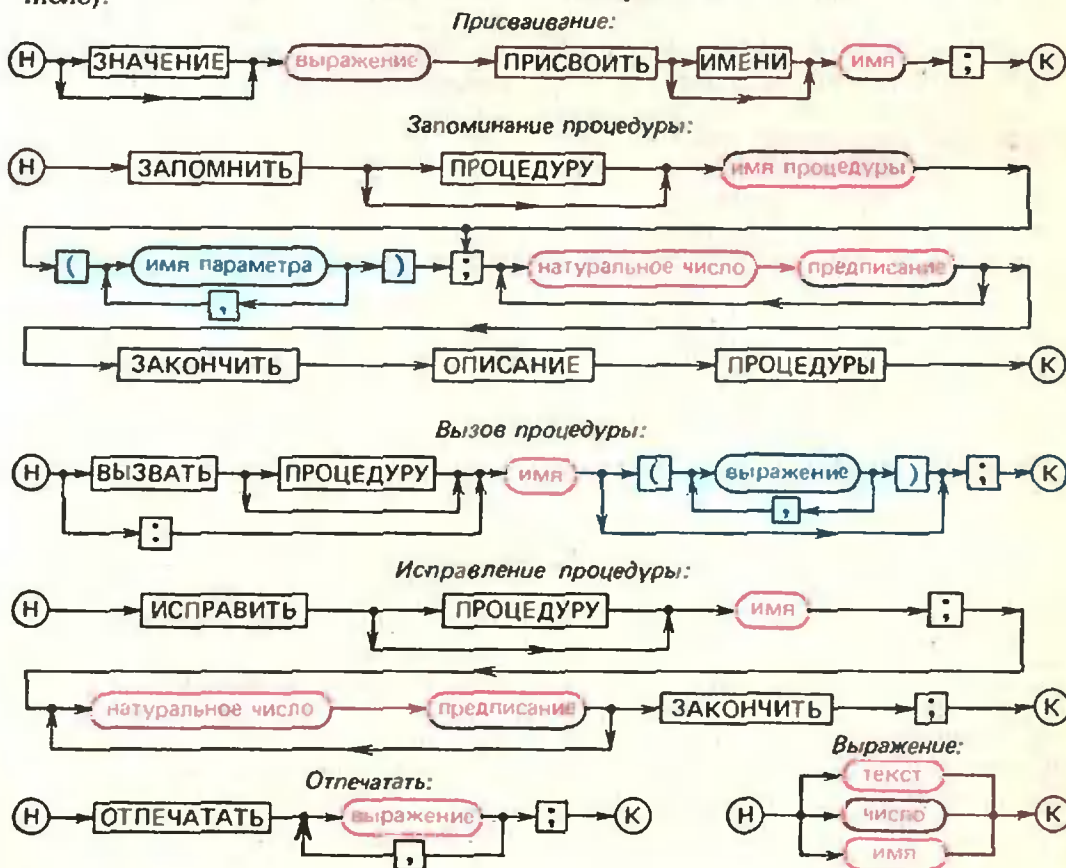
3. Набрать предписание **ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ**.

Синтаксическая диаграмма «Запоминание процедуры» изображена в сводной таблице (на участок этой диаграммы, выделенный синим цветом, пока не обращайте внимания).

Например, составленную на первом уроке программу для робота-дежурного РД-1 можно запомнить под именем ПЕРЕМЕНА при помощи такой последовательности предписаний:

**ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ ПЕРЕМЕНА;**  
10 ОТКРОЙ ОКНО;  
20 НАМОЧИ ТРЯПКУ;  
30 СОТРИ С ДОСКИ;  
60 СЯДЬ НА МЕСТО;  
40 ЗАКРОЙ ОКНО;  
**ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ;**

Для того чтобы хранящаяся в памяти процедура начала исполняться, ее нужно вызвать при помощи предписания **ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ**, структура которого изображена в сводной таблице.



Например, если набрать на терминале робота РД-1 предписание  
**ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ**  
**ПЕРЕМЕНА;**

то робот начнет исполнять в порядке номеров все предписания, входящие в состав процедуры: откроет окно, увлажнит тряпку и так далее.

Процедуру ПЕРЕМЕНА можно вызвать и короче:  
**ВЫЗВАТЬ ПЕРЕМЕНА;**  
или просто:  
**:ПЕРЕМЕНА;**

Механизм работы с номерами, указанными перед каждым предписанием при описании процедур, позволяет исправлять ошибки и вставлять пропущенные части программы.

Если вы заметили ошибку до того, как набрали слово **ЗАКОНЧИТЬ**, то для ее исправления достаточно заново набрать предписание, которое нужно исправить (вместе со старым номером). Номера рекомендуется проставлять не подряд, а, например, через 10, чтобы оставалось место для вставки пропущенных предписаний.

Если ошибка замечена тогда, когда описание процедуры уже закончено, необходимо набрать предписание **ИСПРАВИТЬ ПРОЦЕДУРУ**, синтаксическая диаграмма которого приведена в сводной таблице.

После этого можно вновь набирать исправления так, словно описание процедуры еще продолжается. Окончив работу с процедурой, нужно вновь набрать слово **ЗАКОНЧИТЬ**.

Подробнее об исправлении текстов процедур мы поговорим на следующих уроках нашей школы.

Предписания, входящие в состав процедур, называют *операторами*. В отличие от *директив*, которые исполняются сразу после набора на терминале, операторы не исполняются, а запоминаются после набора. ЭВМ или робот начнут их исполнять только после того, как будет вызвана соответствующая процедура.

Почти все предписания, в том числе вызовы процедур, можно использовать и как операторы, и как директивы. Однако есть и исключения: директивы **ЗАКОНЧИТЬ**, **ЗАПОМНИТЬ**, **ИСПРАВИТЬ** нельзя употреблять в качестве операторов.

**Задание 3.2.** Придумайте системы предписаний для роботов «повара» и «шофера», и напишите для них две—три программы с использованием процедур.

Г. Звенигородский

## Задачи наших читателей

1. Найдите наименьшее значение суммы  $\sum_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{a_i} \right)^2$ , если известно, что  $\sum_{i=1}^n a_i = S$  и  $a_i > 0$ . При каких  $a_i$  оно достигается?

В. Любимов  
(Москва)

2. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — произвольные числа одного знака, среди которых есть различные. Докажите, что

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} > n^3.$$

Т. Райков  
(Болгария)

3. Докажите следующие оценки:

$$a) \quad 1 + \frac{a}{2+0,5a} <$$

$$< \sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2+0,4a},$$

где  $0 < a < 1$ ;

$$б) \quad 1 + \frac{a}{3+a} < \sqrt[3]{1+a} <$$

$$< 1 + \frac{a}{3+0,9a}, \text{ где } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Пользуясь оценкой б), вычислите приближенно  $\sqrt[3]{2}$ .

С. Берколайко  
(с. Котово Белгородской обл.)

4. Докажите, что при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin^m x \cdot \cos^n x \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}.$$

Я. Суконник  
(Киев)



# Всероссийская олимпиада школьников

С 24 по 28 марта 1979 года в городах Орле, Туле, Томске и Саратове проходил заключительный этап V Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике. В нем приняли участие школьники 8, 9, 10 классов; 245 школьников — по физике и 240 — по математике.

Для проведения Всероссийской олимпиады был создан Оргкомитет, работой которого руководил академик В. С. Владимиров. В состав Оргкомитета вошли видные ученые, работники Министерства просвещения РСФСР и представители общественных организаций. В составе Оргкомитета были и представители нашего журнала.

Всероссийская олимпиада проходит в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады, второй — районные (городские), третий — республиканские (АССР), краевые, областные, четвертый — зональные олимпиады.

В четвертом этапе принимают участие по одной команде от АССР, края, области, специализированных школ-интернатов при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах. (Команды Москвы и Ленинграда в четвертом этапе участия не принимают.)

Кроме победителей третьего этапа, в зональных олимпиадах участвуют победители заключительных этапов предыдущих Всесоюзной и Всероссийской олимпиад, получившие дипломы I и II степени, победители конкурса журнала «Квант» и команды городов, проводивших олимпиады.

На четвертом этапе по математике предлагалось 5 задач, по физике — 4 задачи на теоретическом туре и 2 задачи на экспериментальном туре.

Ниже приводятся задачи четвертого этапа и фамилии призеров. Часть задач была помещена в Задачнике «Кванта»\*).

\*) Решения задач по математике, не вошедших в Задачник «Кванта», будут опубликованы в журнале «Математика в школе», 1979, № 6

Некоторые задачи экспериментального тура представлены в этом номере журнала в Лаборатории «Кванта» (см. с. 20).

## Математика 8 класс

1. Доказать, что в последовательности  
а)  $2^2 + 1, 4^2 + 1, 6^2 + 1, 8^2 + 1, \dots$ ;  
б)  $4^2 + 1, 14^2 + 1, 24^2 + 1, 34^2 + 1, \dots$   
бесконечно много составных чисел.

2. Разложить на множители многочлен  $x^4 + ax^2 + b$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ .

3. На сторонах  $AB, BC, CD, DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  площади  $S$  выбраны соответственно точки  $M, N, P, Q$  так, что  $|AM| : |AB| = |BN| : |BC| = |CP| : |CD| = |DQ| : |DA|$ . Найти сумму площадей треугольников  $APB, BQC, CMD, DNA$ .

4. См. задачу M586.

5. На плоскости расположено 2 000 000 точек. Существует ли окружность, внутри которой расположено ровно 1 000 000 точек?

## 9 класс

1. Найти все значения  $a$  и  $b$  такие, что для любого  $x$  из отрезка  $[-1; 1]$  будет выполняться неравенство

$$|2x^2 + ax + b| \leq 1.$$

2. Дан треугольник  $ABC$  площади  $S$ . Точки  $M, N$  — середины его сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Точки  $P$  и  $Q$  делят сторону  $BC$  на три равные отрезка так, что  $BP = PQ = QC$ . Найти площадь общей части четырехугольника  $ANPQ$  и треугольника  $BMC$ .

3. См. задачу M587.

4. См. задачу M588.

5. См. задачу M589.

## 10 класс

1. Используя неравенства  $80 < 81, 96 < 100, 1000 < 1024$ , найти первые два знака после запятой в десятичном разложении числа  $\lg 2$ .

2. Натуральные числа от 1 до 1979 в порядке возрастания записаны по кругу в направлении обхода часовой стрелки. Отправляясь от 1, будем двигаться по часовой стрелке, зачеркивая каждое второе из чисел, не зачеркнутых ранее. Процесс вычеркивания будем продолжать до тех пор, пока не останется одно число. Какое число останется?

3. Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен  $V$ . На отрезках  $BD$  и  $A_1 C$  расположены пары точек  $M, N$  и  $P, Q$  соответственно. При этом  $|BD| : |MN| = 3, |A_1 C| : |PQ| = 4$ . Найти объем тетраэдра  $MNPQ$ .

4. См. задачу M590.

5. Найти все числа  $a, b, c, d$  такие, что:

а) функция  $f(x) = 4x^3 - dx$  при всех  $x$  из отрезка  $[-1; 1]$  удовлетворяет неравенству  $|f(x)| \leq 1$ ;

б) функция  $g(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$  при всех  $x$  из отрезка  $[-1; 1]$  удовлетворяет неравенству  $|g(x)| \leq 1$ .

## Физика

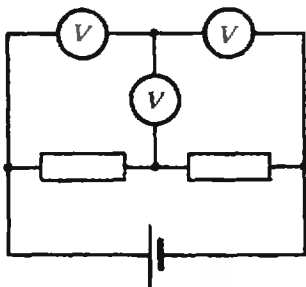
### Теоретический тур

#### 8 класс

1. См. задачу Ф598.
2. Коза может бежать по дороге со скоростью не больше  $v$ , а по полю — со скоростью не больше  $u$ , причем  $u < v$ . Определить область точек, в которые коза может добежать за время  $t$ , если дорога прямая.

*С. Кротов*

3. См. задачу Ф599.
4. В схеме, приведенной на рисунке, все вольтметры одинаковые. На клеммы подается постоянное напряжение  $U = 9\text{В}$ .



Левый вольтметр показывает напряжение  $U_1 = 2\text{В}$ . Что показывают остальные вольтметры? \*)

#### 9 класс

1. На блок радиуса  $R$  надето кольцо из гибкой невесомой нерастяжимой нити. По нити скользит без трения маленькая бусинка массы  $m$ . Размер бусинки много меньше размера блока. Нить разрывается при натяжении, превышающем  $T$ . Определить наибольшую угловую скорость, которую может иметь бусинка и при которой нить не разрывается. При какой длине нити возможна наибольшая угловая скорость? Ускорение свободного падения не учитывать.

*Д. Кузнецов*

2. См. задачу Ф602.
3. Металлическая гайка удерживается на гладком хрупком куполе, имеющем форму полусферы радиуса  $R$ , в вершине которой сделано небольшое отверстие, в которое гайка свободно проходит. Какую минимальную скорость, направленную по касательной к куполу, нужно сообщить гайке, чтобы она попала в отверстие? Радиус, проведенный в точку нахождения гайки, составляет с вертикалью угол  $\alpha$ .

*С. Кротов*

4. См. задачу Ф601.

#### 10 класс

1. См. задачу Ф600.

\*) При таких числовых данных сопротивление в цепи оказывается отрицательным

2. См. задачу Ф574 («Квант», 1979, № 5).

3. См. задачу Ф576 («Квант», 1979, № 5).

4. Человек массы  $m$  разбегается равноускоренно от одного края плиты длины  $l$  и массы  $M$ , резко останавливаясь на другом краю. Коэффициент трения между плитой и горизонтальной поверхностью  $\mu$ , а между человеком и плитой  $\mu'$ , причем  $\mu' \gg \mu$ . На какое минимальное расстояние  $L$  в направлении разбега может человек таким образом передвинуть плиту?

*А. Варгин*

### Экспериментальный тур

#### 8 класс

1. Определите плотность воздуха при атмосферном давлении.

**Оборудование:** шар для взвешивания воздуха, весы и разновесы, насос Шинца или Комовского, сосуд емкостью 1—1,5 л, измерительный цилиндр емкостью 1 л.

2. См. Лабораторию «Кванта» (с. 20, задача 1).

#### 9 класс

1. Определите ЭДС неизвестного источника тока.

**Оборудование:** источник тока с неизвестной ЭДС, источник тока с известной ЭДС, два конденсатора одинаковой емкости, миллиамперметр.

2. См. Лабораторию «Кванта» (с. 20, задача 2).

#### 10 класс

1. См. Лабораторию «Кванта» (с. 20, задача 3).

2. Определите экспериментальную зависимость индукции магнитного поля вокруг прямолинейного проводника с током от силы тока и расстояния от проводника.

**Оборудование:** ВС-24, проволоочная рамка, амперметр, магнитная стрелка, линейка измерительная.

## Призеры Всероссийской олимпиады школьников

### Математика

#### Дипломы I степени

по 8 классам получили  
*Бургай Д.* (Ленинград, ФМШ № 45),  
*Евсиков М.* (Брянск, с. ш. № 11),  
*Пименов А.* (Казань, с. ш. № 123),  
*Табак А.* (Каменск, с. ш. № 2);

#### по 9 классам —

*Беспамтных С.* (Артемовский Свердловской обл., с. ш. № 12),  
*Ижболдин О.* (Ленинград, ФМШ № 45),  
*Кузьмин Ю.* (Москва, ФМШ № 18);

по 10 классам —

*Кожухин К.* (Новосибирск, с. ш. № 130),  
*Лазарев Ю.* (Дзержинск Горьковской обл., с. ш. № 2),  
*Надеждин Б.* (Москва, ФМШ № 18),  
*Фесенко И.* (Ленинград, ФМШ № 45).

### Дипломы II степени

по 8 классам получили

*Иванцов Р.* (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2),  
*Коротков А.* (Горький, с. ш. № 44),  
*Овчинников Л.* (Вязники, с. ш. № 11),  
*Унежев А.* (Нальчик, с. ш. № 19);

по 9 классам —

*Зайцев Ю.* (Видное, с. ш. № 9),  
*Келарев А.* (Свердловск, с. ш. № 141),  
*Павлющук С.* (Москва, ФМШ № 18),  
*Трушин В.* (Бийск, с. ш. № 18);

по 10 классам —

*Забелин В.* (Москва, ФМШ № 18),  
*Кузнецов С.* (Ангарск, с. ш. № 10),  
*Пикусов С.* (Новочебоксарск, с. ш. № 2),  
*Облаков И.* (Ленинград, ФМШ № 45).

### Физика

#### Дипломы I степени

по 8 классам получили

*Баков П.* (Балашиха, с. ш. № 10),  
*Гутин А.* (Клиппы, с. ш. № 2),

*Матвеев А.* (Ульяновск, с. ш. № 5),  
*Осадаев А.* (Иркутск, с. ш. № 34);

по 9 классам —

*Барков С.* (Новомосковск, с. ш. № 2),  
*Криско А.* (Владивосток, с. ш. № 61),  
*Павлов А.* (Москва, ФМШ № 18),  
*Сивинцев* (Свердловск, с. ш. № 141);

по 10 классам —

*Гречко В.* (Новосибирск, ФМШ № 165),  
*Зудин Е.* (Александров, с. ш. № 4),  
*Надеждин Д.* (Курган, с. ш. № 47),  
*Омельяничук А.* (Москва, ФМШ № 18).

#### Дипломы II степени

по 8 классам получили

*Беспалов А.* (Горький, с. ш. № 40),  
*Воробьев А.* (Тихвин, с. ш. № 8),  
*Кудрявцев С.* (Магадан, с. ш. № 1),  
*Сафаралиев Р.* (Астрахань, с. ш. № 32);

по 9 классам —

*Иванов В.* (Москва, ФМШ № 18),  
*Ратников Ф.* (Ленинград, ФМШ № 45),  
*Светлов М.* (Пермь, с. ш. № 9),  
*Яшин А.* (Братск, с. ш. № 26);

по 10 классам —

*Клекин К.* (Саратов, с. ш. № 13),  
*Плотников А.* (Архангельск, с. ш. № 4),  
*Тлушков А.* (Йошкар-Ола, с. ш. № 8),  
*Шелепов Ю.* (Барнаул, с. ш. № 42).

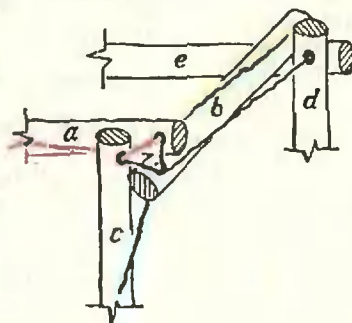
*О. Овчинников, К. Шимбирева,  
Ю. Широков, Г. Яковлев*

### Наша обложка

## Трансформируемый куб

На второй странице обложки вы видите каркас куба, составленный из стержней, скрепленных нитками, и еще три фигуры, полученные «трансформацией» этого куба. Для того чтобы изготовить такой куб, нужно взять 12 деревянных стержней и прочную нить (вместо нее можно использовать тонкую леску). На концах стержней следует просверлить отверстия диаметром один миллиметр. Затем эти стержни нужно связать так, как показано на рисунке. В конце стержня

а завязывается нить. Затем она пропускается сквозь отверстие в стержне с и завязывается на другом конце стержня а. Следующая нить пропускается через от-



верстие в стержне а и завязывается на концах стержня b. Третья нить пропускается через отверстие в стержне b и завязывается на концах стержня с. Завязывать нити удобно так: пропустить их в отверстия на концах стержня и завязать на них узлы. Точно также следует связать и остальные вершины куба. При этом нужно проследить за тем, чтобы все вершины были связаны одинаково (по часовой или против часовой стрелки), то есть чтобы при перемещениях куба между ними не было разницы. Поскольку у каждого стержня два конца — вдоль него «вытянется» две нити. Модель изготовлена!

*В. Кольчук*

Н. Васильев

## Задачи республиканских олимпиад

Ряд задач, предлагавшихся в этом году на республиканских олимпиадах по математике, включен в Задачник «Кванта» (М556—М563, М587—М590). Задачи, предлагавшиеся на олимпиаде РСФСР, помещены на с. 58. Предлагаем читателям подумать также над следующими задачами, предлагавшимися в других республиках (указания и ответы к ним мы опубликуем в одном из следующих номеров).

После задачи указываются фамилии математиков, предложивших эти задачи редакции «Кванта» или Методической комиссии Всесоюзной олимпиады.

1. (8) Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 4, 5, 9 и 11 дает остатки соответственно 3, 4, 8 и 10.

Б. Агафонов

2. (8) Доказать, что всякое число вида  $101010\dots101$  ( $n$  нулей  $n+1$  единиц, причем  $n > 1$ ) является составным.

Б. Агафонов

3. (8—9)  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  — натуральные числа, сумма которых равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их НОД (наибольший общий делитель)?

А. Толпыго

4. (8—9) Пусть  $p$  — простое  $k$ -значное число, в записи которого нет нулей. Доказать, что все  $k$  чисел, полученных из  $p$  циклическими перестановками цифр, различны. (Пояснение: например, из числа 2317 циклическими перестановками цифр получаются еще три числа 3172, 1723, 7231.)

А. Слинько

5. (8—10) Множество  $M$  состоит из всех чисел вида  $x^2+x$ , где  $x$  — всевозможное натуральное число. Доказать, что для любого  $k \geq 2$  в множестве  $M$  найдутся  $k$  различных чисел, сумма которых также принадлежит  $M$ .

В. Батырев

6. (8—9) Выпуклый четырехугольник разрезан на пять треугольников. Докв-

жите, что один из треугольников содержит целиком некоторую сторону четырехугольника.

7. (8—9) Построенная по данной последовательности  $a_n$  последовательность  $b_n = a_{n+1} - a_n$  является убывающей, причем  $b_1$  меньше  $a_1$ . Доказать, что тогда и последовательность  $c_n = a_n/n$  является убывающей.

З. Чантурия

8. (8—10) Отрезки  $AE$  и  $CD$  — биссектрисы углов треугольника  $ABC$ . Докажите, что если  $\widehat{BDE}/\widehat{EDC} = \widehat{BED}/\widehat{DEC}$ , то треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

А. Савин

9. а) (8) Диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что четыре проекции точки их пересечения на стороны четырехугольника лежат на одной окружности.

б) (9—10) Дана четырехугольная пирамида, у которой диагонали  $AC$  и  $BD$  основания перпендикулярны, а основание  $H$  высоты совпадает с точкой пересечения диагоналей. Доказать, что четыре проекции точки  $H$  на боковые грани лежат на одной окружности.

В. Михайловский

10. (9—10) Рассматриваются все попарно неконгруэнтные треугольники с вершинами в точках, делящих окружность на  $N$  равных дуг ( $N \geq 3$ ). При каких  $N$ : а) больше половины, б) ровно половина этих треугольников — равнобедренные?

Н. Васильев

11. (8—10) Во всех клетках прямоугольной таблицы  $m \times n$  записаны числа  $\pm 1$  ( $m > n \geq 2$ ). За один шаг разрешается одновременно сменить знак у четырех чисел любого квадрата  $2 \times 2$ . При каких  $m$  и  $n$  из первоначальной таблицы за несколько шагов можно получить таблицу:

а) с суммой всех чисел 0?

б) с расположением  $+1$  и  $-1$  в шахматном порядке?

А. Егоров

12. (8—10) Точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ . В полуплоскости с границей  $AC$  взяты такие точки  $K$  и  $H$ , что  $|AK| = |KB|$ ,  $|BH| = |HC|$ .  $\widehat{AKB} = \alpha$ ,  $\widehat{BHC} = 180^\circ - \alpha$ . Найдите углы треугольника  $KHM$ , где  $M$  — середина отрезка  $AC$ .

Л. Купцов

13. (10) Доказать, что при  $x \in [0; \pi/4]$  выполнено неравенство  $x \cos x < 0.71$ .

Л. Гоголадзе



Если промежуток не замкнут

1. При  $\frac{a}{h} < 1$  стороны искомого прямоугольника  $\frac{2a^2}{h}$  и  $\frac{h^2 - a^2}{h}$ ; при  $\frac{a}{h} \geq 1$  наибольшее значение не достигается.
2. При  $h = a$  периметр постоянен, при  $h \neq a$  наибольшее значение не достигается.
3. При  $b \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}$  наибольшая хорда равна  $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ , при  $b > \frac{a\sqrt{2}}{2}$  наибольшая хорда равна  $2b$ .
4. Для полукруга это — расстояния до концов диаметра. Пусть теперь хорда сегмента длины  $2a$  делится данной точкой на отрезки  $a + \lambda$  и  $a - \lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Если сегмент не содержит центра круга, то наибольшее расстояние равно  $a + \lambda$ , а наименьшее  $R - \sqrt{R^2 + \lambda^2 - a^2}$ . Если сегмент содержит центр круга, то наибольшее расстояние равно  $R + \sqrt{R^2 + \lambda^2 - a^2}$ , а наименьшее  $a - \lambda$ .
5.  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$  и  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$ .
6.  $p \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .
7.  $\frac{1+q^2}{3}$  для  $|q| \in [0; 1]$ ,  $\frac{(1+q)^2}{6}$  для  $q \in [1; 2]$  и  $\frac{2+q^2}{4}$  для  $|q| \in [2; +\infty]$ .

Закон сохранения импульса.  
Реактивная сила

1.  $|\vec{v}| = \sqrt{2E_0(1/m_0 + 1/m)}$ .
2. Указание. Воспользуйтесь законом сохранения импульса.
3.  $|\vec{F}_2| = M|\vec{v}|^2/L$ .
4.  $H = h + 3/4 nl$ .
5.  $|\vec{v}_{min}| = \sqrt{Mgl/(M+m)}$ .
6. Может (реактивная сила определяется значением скорости истечения газов относительно ракеты)
7. Непосредственно после вылета из ракеты снаряд движется в ту же сторону, что и ракета, то есть вперед. Через некоторое время стабилизаторы разворачивают снаряд, затем под действием реактивной силы он разгоняется и может догнать самолет.

Заочная школа программирования (уроки 1 и 2)

(см. «Квант», № 9)

К заданию 1.1.

Программы В и Д формально правильны. В программе А перед предписаниями поставлены номера, хотя это не предусмотрено системой предписаний, поэтому робот не сможет исполнить эту программу. Если номера убрать, то исполнить программу робот сможет, но поведет себя при этом как очень глупый дежурный: сначала вытрет доску сухой тряпкой, а потом победит ее мочить, откроет окно и сразу же его закроет.

В программе С трижды нарушен второй закон программирования: предписаний ПОДМЕТИ ПОЛ, ВЫТРИ С ДОСКИ, СЯДЬ ЗА ПАРТУ нет в СПР. Хотя программа Д формально правильна, то есть робот может ее исполнить, но после этого доска останется грязной, а окно — незакрытым.

В программе Е после предписаний поставлены точки вместо точек с запятыми. Если исправить эту ошибку, получится правильная программа.

К заданию 1.2. См. рис. 1.

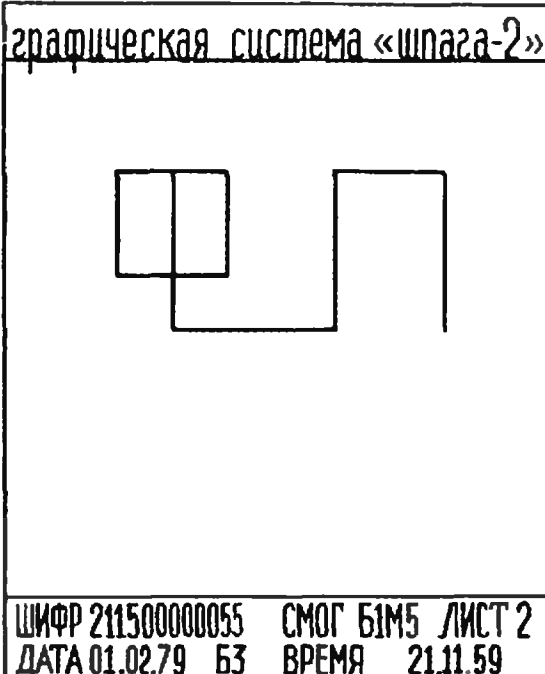


Рис. 1.

К заданию 1.3. Например: 11313112 121131311312212131212211212112211212112 211212110.

К заданию 2.1. В тексте справки шесть переменных полей. Соответствующая синтаксическая диаграмма могла бы выглядеть так:



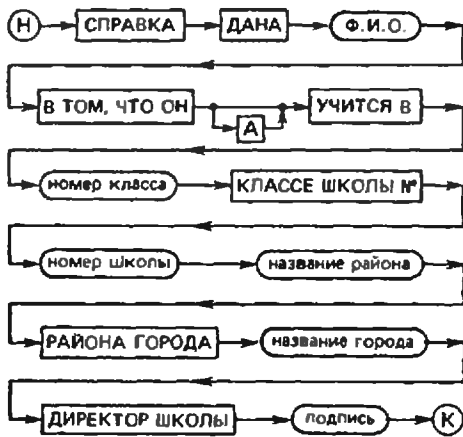


Рис. 2.

После подстановки значений переменных полей это предложение превратится в утверждение.

К заданию 2.2. См. рис. 3.

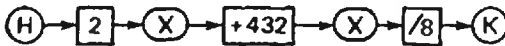


Рис. 3.

К заданию 2.3. Натуральное число не принято начинать с нуля.

К заданию 2.5. 5.3. -52.01 0.0000

К заданию 2.6. См. рис. 4.

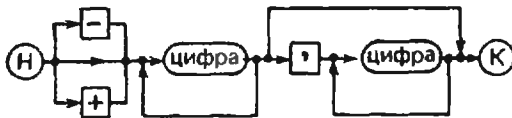


Рис. 4.

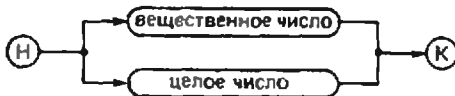


Рис. 5.

К заданию 2.7. См. рис. 5.

К заданию 2.8. Один из возможных вариантов программы:

ПРОЕХАТЬ 300 М;  
 ОТПЕЧАТАТЬ 'Я ПРИБЫЛ  
 В ТОЧКУ В';  
 ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;  
 ПРОЕХАТЬ 500 М;  
 ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;  
 ПРОЕХАТЬ 600 М;  
 ОТПЕЧАТАТЬ 'Я В ТОЧКЕ С';  
 ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;  
 ПРОЕХАТЬ 625 М;  
 ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;  
 ПРОЕХАТЬ 731 М;  
 ОТПЕЧАТАТЬ 'Я В ТОЧКЕ Д';  
 ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;  
 ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;  
 ПРОЕХАТЬ 431 М;

ПОВЕРНУТЬ ВПРАВО;  
 ПРОЕХАТЬ 125 М;  
 ОТПЕЧАТАТЬ 'Я ПРИБЫЛ  
 В ТОЧКУ А';

Всероссийская олимпиада школьников  
 Физика

8 класс

2. См. рисунок 6.

Поле

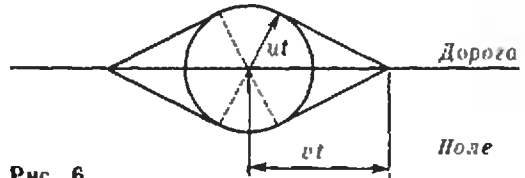


Рис. 6.

9 класс

$$1. \omega_{\max} = \sqrt{\frac{T}{mR}}; \quad t = \left(\frac{3}{2}\pi + 2\right)R.$$

3. При  $\cos \alpha \geq \frac{2}{3}$  гайка может попасть в отверстие, двигаясь по поверхности купола; при этом

$$v_{\min} = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)}.$$

При  $\cos \alpha < \frac{2}{3}$  гайка попадает в отверстие, летя по параболе; при этом

$$v_{\min} = \sqrt{gR \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha}}.$$

10 класс

$$4. L = \frac{m}{m+M} L.$$

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. 2 часа 30 минут.

2. Сумма  $1+2+3+\dots+p$  равна  $\frac{p(p+1)}{2}$ .

Если она оканчивается на 1979, то, в частности,  $p(p+1)$  оканчивается на 8. Последняя цифра произведения определяется последними цифрами сомножителей, поэтому, проверив, что произведения  $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 8 \cdot 9$  не оканчиваются на 8, заключаем, что рассматриваемая сумма не может оканчиваться на 1979.

3. 10 ворон и 25 ворон.

$$4. 1 - \frac{1}{4} = \frac{2^2 - 1}{2^2} = \frac{2-1}{2} \cdot \frac{2+1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2};$$

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{3^2 - 1}{3^2} = \frac{3-1}{3} \cdot \frac{3+1}{3} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \text{ и т. д.}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{125}\right) = \\ & = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \times \dots \\ & \dots \times \left(\frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15}\right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

5. Пусть  $\overline{abc}$  — задуманное число. Тогда  $|\overline{abc} - \overline{cba}| = |a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c - c \cdot 10^2 - b \cdot 10 - a| = 99|a - c|$ .

Поэтому если  $a = c$ , то есть последняя цифра разности равна нулю, то и в ответе будет нуль.

При  $a \neq c$  ( $0 < a \leq 9$ ,  $0 < c \leq 9$ ) получаем, что у ответа цифра, стоящая в разряде десятков, и сумма цифр, стоящих в разрядах сотен и единиц, всегда равна девяти. Поэтому, узнав, что последняя цифра ответа есть  $x$ , мы можем сразу назвать ответ:  $(9-x)9x$  (скажем, если  $x = 5$ , то ответ будет 495).

#### Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 14)

##### Задача 1

$$S = \frac{b}{(1-q)^2} [(a + (n-1)d)q^{n+1} - (a + nd)q^n - (a-d)q + a]$$

если  $q \neq 1$ ;

$$S = bn \frac{2a + (n-1)d}{2},$$

если  $q = 1$ .

##### Задача 2

$$\begin{aligned} \Sigma = nab + \frac{n(n-1)}{2} (d_1 b + d_2 a) + \\ + d_1 d_2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

$$1. \frac{1}{99^2} [(2n-1)100^{n+1} - 2n \cdot 100^n - (n-1)100 + n].$$

$$2. \frac{3}{999^2} [(2n-1)10^3(n+1) - 2n \cdot 10^{3n} - (n-1)10^3 + n].$$

$$3. \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

$$4. \frac{1}{3} n(4n^2 + 12n - 1).$$

$$5. 143n + 24n(n-1) + \frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}.$$

$$6. 3n + \frac{13}{2} n(n-1) + \frac{5}{3} n(n-1)(2n-1).$$

$$7. 399n + 182n(n-1) +$$

$$+ \frac{77}{6} n(n-1)(2n-1).$$

Номер составили:

А Виленкин, И Клумова, Т Петрова,  
А Сосинский, В Тихомирова, Ю Шиханович

Номер оформили:

Г Красников, Э Ниларов, И Смирнова,  
В Чернов

За редакцияй Э Чернова

Художественный редактор Т Макарова

Корректор Н Румянцова

113085, Москва, М 35, Б Ордынка, 21/16,

«Квант», тел. 231 83 62

Сдано в набор 1/VIII-79

Подписано в печать 12/IX-79

Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,05 Т-16168

Цена 30 коп. Заказ 1718

Тираж 279160 экз.

Чеховский полиграфический комбинат

Союзполиграфпрома

Государственного комитета

СССР по делам издательства, полиграфии

и книжной торговли,

г. Чехов Московской области

**ЮБИЛЕЙ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**

Исполнилось 15 лет со дня пуска первой в мире атомной электростанции. Это выдающееся событие в истории человечества произошло 27 июня 1954 года в городе Обнинске Калужской области.

Советский Союз осуществляет грандиозную программу строительства мощных атомных электростанций с различными атомными реакторами. Наша страна оказывает огромную помощь другим социалистическим государствам в развитии атомной энергетики. Одновременно ведется большая работа по созданию атомных транспортных средств. Уже вступили в строй три мощных атомных ледокола — «Ленин», «Сибирь» и «Арктика». Они коренным образом изменили условия навигации в Северном Ледовитом океане. 17 августа 1977 года ледокол «Арктика» впервые в истории мореплавания достиг Северного полюса Земли.

Успехи нашей страны в области мирного использования атомной энергии нашли свое отражение в отечественной филателии. В январе 1956 года была выпущена серия из трех марок, посвященных первой атомной электростанции. Две из них воспроизведены в верхней части нашей подборки. В 1958 и 1978 годах выпускались марки с изображением атомных ледоколов. Ледокол «Ленин» мы видим и на воспроизведенной здесь кубинской марке. Любопытно, что рядом с ним изображены пингвины, которых нет в северном полушарии. В 1958, 1962 и 1963 годах в почтовое обращение поступали марки, посвященные борьбе народов за запрещение атомного оружия и использование атомной энергии только в мирных целях. Три из них приведены в нашей подборке вместе с номерным почтовым блоком, выпущенным в честь рейда «Арктики» к Северному полюсу.

В. Рудов



№ 149570

Можете ли вы выяснить, как расположены «черные дыры»: какие из них ближе к наблюдателю, а какие — дальше? Может ли этот рисунок служить изображением прост-

ранственного объекта, или на нем изображен невозможный объект? И, наконец, если это плоский лабиринт, то сколько у него входов?

